elon lages lima

curso de análise volume 1

elon lages lima

curso de análise volume 1

Décima segunda edição
(quarta impressão)

impa
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Gian Calvi Criação Visual Ltda.

Títulos Publicados:

- Curso de Análise, Volume 1 - *Elon Lages Lima*
- Medida e Integração - *Pedro Jesus Fernandez*
- Aplicações da Topologia à Análise - *Chaim Samuel Hönig*
- Espaços Métricos - *Elon Lages Lima*
- Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais - *Djairo Guedes de Figueiredo*
- Introdução aos Sistemas Dinâmicos - *Jacob Palis Junior e Wellington C. de Melo*
- Introdução à Álgebra - *Adilson Gonçalves*
- Aspectos Teóricos da Computação - *Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos Simon e Tomasz Kowaltowski*
- Teoria Geométrica das Folheações - *Alcides Lins Neto e César Camacho*
- Geometria Riemanniana - *Manfredo P. do Carmo*
- Lições de Equações Diferenciais Ordinárias - *Jorge Sotomayor*
- Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário - *Barry R. James*
- Curso de Análise, Volume 2 - *Elon Lages Lima*
- Teoria Ergódica - *Ricardo Mañé*
- Teoria dos Números Algébricos - *Otto Endler*
- Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais - *Javier Thayer*
- Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução - *Rafael Iório Jr. e Valéria Iório*
- Álgebra: Um Curso de Introdução - *Arnaldo Leite P. Garcia e Yves Albert E. Lequain*
- Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento - *Elon Lages Lima*
- Funções de uma Variável Complexa - *Alcides Lins Neto*
- Elementos de Álgebra - *Arnaldo Garcia e Yves Lequain*
- Introdução à Geometria Analítica Complexa - *Marcos Sebastiani*
- Curso de Teoria da Medida - *Augusto Armando de Castro Júnior*
- Introdução à Teoria da Medida - *Carlos Isnard*
- Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica - *Johann Baumeister e Antonio Leitão*

Distribuição:

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Prefácio da primeira edição

– *What is jazz, Mr. Armstrong?*

– *My dear lady, as long as you have to ask that question, you will never know it.*

Esta é a primeira parte de um Curso de Análise. Nela se estudam as funções reais de uma variável real.

A teoria é apresentada desde o começo. Não se faz uso de resultados que não sejam estabelecidos no texto. Todos os conceitos introduzidos são amplamente ilustrados por meio de exemplos.

Apesar disso, é conveniente que os leitores deste livro possuam experiência equivalente à de dois semestres de Cálculo. Assim, terão alguma familiaridade com os aspectos computacionais mais simples e com a interpretação intuitiva de certas noções como limites, continuidade, derivadas, integrais e séries. Essas idéias constituem os temas fundamentais do curso. Elas são tratadas de modo auto-suficiente, mas a ênfase é colocada na conceituação precisa, no encadeamento lógico das proposições e na análise das propriedades mais relevantes dos objetos estudados.

As manipulações elementares e rotineiras com limites, derivadas, integrais, etc., embora necessárias, são deixadas de lado, pois as supomos suficientemente exercitadas nos cursos de Cálculo.

Isso não significa que menosprezemos os exercícios. Pelo contrário, este livro contém várias centenas deles. Ler os enunciados de todos e resolver quantos puder é uma tarefa essencial do leitor.

Matemática não se aprende passivamente.

Os exercícios ensinam a usar conceitos e proposições, desfazem certos mal-entendidos, ajudam a fixar na mente idéias novas, dão oportunidade para explorar as fronteiras da validez das teorias expostas no texto e reconhecer a necessidade das hipóteses, apresentam aplicações dos teoremas demonstrados e informam o leitor sobre resultados adicionais, alguns dos quais não figuram no texto apenas por uma questão de gosto.

Ao estudar o livro, o aluno está sendo conduzido pela mão do autor. Os exercícios lhe fornecem o ensejo de caminhar mais solto e, assim, ir ganhando independência. Para quem está convencido da importância de resolver os exercícios deste livro, um esclarecimento: eles variam muito em seus graus de dificuldade. Não se desencoraje se não conseguir resolver alguns (ou muitos) deles. É que vários são difíceis mesmo. Volte a eles depois, quando tiver lido mais do livro e se sentir mais confiante. Acho, porém, que incluí exercícios "resolvíveis" em número suficiente para satisfazer o amor-próprio de cada leitor.

No final do livro, há uma lista de referências bibliográficas. Elas contêm material relacionado com os assuntos aqui tratados. A lista é bastante seletiva, refletindo fortemente meu gosto pessoal. Nela foram incluídos os livros que, no meu entendimento, melhor servem como leitura colateral, esclarecendo, completando ou abordando sob outros aspectos os temas estudados neste livro.

Ao adotar este livro num curso, o professor deve considerar a possibilidade de omitir o Cap. I, que contém apenas generalidades sobre conjuntos e funções. Se os alunos já estudaram antes estas coisas, o curso pode iniciar pelo Cap. II, servindo o Cap. I apenas para recordar certas definições, se necessário. Também o Cap. II pode ser omitido, se os alunos já tiverem aprendido a teoria dos números naturais e as diferenças entre conjunto finito, enumerável e não-enumerável (num curso de Álgebra, por exemplo). Assim, para alunos com tal experiência, a leitura deste livro pode começar no Cap. III, onde são introduzidos os números reais.

Uma palavra ao leitor: não se lê um livro de Matemática como se fosse uma novela. Você deve ter lápis e papel na mão para reescrever, com suas próprias palavras, cada definição, o enunciado de cada teorema, verificar os detalhes às vezes omitidos nos exemplos e nas demonstrações e resolver os exercícios referentes a cada tópico estudado. É conveniente, também, desenhar figuras, (principalmente gráficos de funções) a fim de atribuir significado intuitivo aos raciocínios do texto. Embora as figuras não intervenham diretamente na argumentação lógica, elas servem de guia à nossa imaginação, sugerem idéias e ajudam a entender os conceitos.

Ao terminar, tenho o prazer de registrar meus agradecimentos a várias pessoas, que contribuíram para tornar mais claro o texto em alguns pontos, e livrá-lo de erros em outros: meu colega Manfredo P. do Carmo, com espírito às vezes oposicionista, me obrigou a defender minha posição, quando isso era possível, e a ceder às suas críticas, quando procedentes; o Professor Renato Pereira Coelho, com paciência invulgar, apontou vários deslizes e pontos obscuros, que procurei corrigir. Sou também grato a diversos alunos do IMPA que leram a versão preliminar e notaram erros. Não podendo mencionar cada um, agradeço entre eles a Paulo Villela e Maria Lúcia Campos. Finalmente, sou grato a Solange de Azevedo, que resolveu os exercícios e corrigiu alguns dos seus enunciados.

Rio de Janeiro, agosto de 1976.

ELON LAGES LIMA

Observação. As citações bibliográficas são feitas no texto colocando-se o nome do autor entre colchetes. Assim, por exemplo, [Hardy] significa uma referência ao livro de G.H. Hardy que consta da lista na página 339.

Prefácio da sexta edição

As cinco edições posteriores diferem da primeira pela correção de vários erros tipográficos, pela modificação de dois ou três trechos obscuros e pelo acréscimo de alguns exercícios. Manifesto de público meu agradecimento aos leitores que me chamaram a atenção para esses pontos, destacando em especial os professores Oclide Dotto, Claus Doering, Carlos Ivan Simonsen Leal e Lino Sanabria. Agradeço ainda a boa acolhida que o livro recebeu dos meus colegas que o adotaram. Espero que ele continue a gozar da mesma confiança e merecer a colaboração desinteressada e construtiva sob a forma de sugestões, críticas e reparos, com vistas a aperfeiçoamentos posteriores.

Rio de Janeiro, julho de 1989.

ELON LAGES LIMA

Prefácio da décima primeira edição

A principal mudança nesta edição é de ordem gráfica. Todo o texto foi digitado eletronicamente. Isto ensejou a oportunidade de incluir novas correções, especialmente algumas apontadas pelo Professor Florêncio Guimarães, além da cuidadosa revisão feita por Dayse Pastore e Priscilla Pomateli, a quem agradeço aqui. A nova diagramação foi feita por Rogério Trindade.

Rio de Janeiro, 7 de janeiro de 2004.

ELON LAGES LIMA

Conteúdo

Capítulo I

Conjuntos e Funções

Introduziremos neste capítulo a linguagem de Conjuntos e Funções, que será utilizada sistematicamente nos capítulos seguintes. Toda a Matemática é, hoje em dia, apresentada nessa linguagem; assim imaginamos que a maioria dos leitores já tenha certa familiaridade com o assunto. Entretanto, não exigiremos conhecimento prévio algum da matéria.

O objetivo deste livro é estudar conjuntos de números reais e funções reais de uma variável real. Os números reais serão apresentados no Cap. III. Estes dois primeiros capítulos são preliminares. Por isso nos permitiremos tratar aqui conjuntos e funções dentro do chamado "ponto de vista ingênuo". Ou seja, adotamos um estilo informal e descritivo, em contraste com o ponto de vista axiomático, segundo o qual deveríamos apresentar uma lista completa de objetos não definidos e proposições não demonstradas (ou axiomas), a partir dos quais todos os conceitos seriam definidos e todas as afirmações provadas. O método axiomático será utilizado substancialmente a partir do Cap. III. Aos leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre Lógica e Teoria dos Conjuntos, recomendamos a leitura de [Tarski] e [Halmos], duas pequenas obras-primas que contêm tudo o que um matemático precisa saber sobre esses assuntos.

1 Conjuntos

Um *conjunto* (ou *coleção*) é formado de objetos, chamados os seus *elementos*. A relação básica entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x *pertence a* A e escrevemos

$$x \in A.$$

Se, porém, x não é um dos elementos do conjunto A, dizemos que x *não pertence a* A e escrevemos

$$x \notin A.$$

Um conjunto A fica *definido* (ou *determinado*, ou *caracterizado*) quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A.

Exemplo 1. Seja A o conjunto dos triângulos retângulos. O conjunto A está bem definido: um objeto x pertence a A quando é um triângulo e, além disso, um dos seus ângulos é reto. Se x não for um triângulo, ou se x for um triângulo que não possui ângulo reto, então x não pertence a A.

Usa-se a notação

$$X = \{a, b, c, \dots\}$$

para representar o conjunto X cujos elementos são os objetos a, b, c, etc. Assim, por exemplo, $\{1, 2\}$ é o conjunto cujos elementos são os números 1 e 2. Dado o objeto a, pode-se considerar o conjunto cujo único elemento é a. Esse conjunto é representado por $\{a\}$.

O conjunto dos *números naturais* $1, 2, 3, \dots$ será representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Portanto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto dos *números inteiros* (positivos, negativos e zero) será indicado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Assim,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto $\mathbb{Q}$, dos *números racionais*, é formado pelas frações p/q, onde p e q pertencem a $\mathbb{Z}$, sendo $q \neq 0$. Em símbolos,

$$\mathbb{Q} = \{p/q; \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0\}.$$

Lê-se: "$\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações p/q tais que p pertence a $\mathbb{Z}$, q pertence a $\mathbb{Z}$ e q é diferente de zero".

A maioria dos conjuntos encontrados em Matemática não são definidos especificando-se, um a um, os seus elementos. O método mais freqüente de definir um conjunto é por meio de uma propriedade comum e exclusiva dos seus elementos. Mais precisamente, parte-se de uma propriedade P. Ela define um conjunto X, assim: se um objeto x goza da propriedade P, então $x \in X$; se x não goza de P então $x \notin X$. Escreve-se

$$X = \{x; x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Lê-se: "X é o conjunto dos elementos x tais que x goza da propriedade P".

Muitas vezes a propriedade P se refere a elementos de um conjunto fundamental E. Neste caso, escreve-se

$$X = \{x \in E; x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Por exemplo, seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e consideremos a seguinte propriedade, que se refere a um elemento genérico $x \in \mathbb{N}$:

"x é maior do que 5".

A propriedade P, de um número natural ser maior do que 5, define o conjunto $X = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$, ou seja,

$$X = \{x \in \mathbb{N}; \quad x > 5\}.$$

Lê-se: "X é o conjunto dos x pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que x é maior do que 5".

Às vezes, ocorre que nenhum elemento de E goza da propriedade P. Neste caso, o conjunto $\{x \in E; x \text{ goza de } P\}$ não

possui elemento algum. Isto é o que se chama um conjunto vazio. Para representá-lo, usaremos o símbolo $\emptyset$.

Portanto, o *conjunto vazio* $\emptyset$ é definido assim:

$$\text{Qualquer que seja } x, \text{ tem-se } x \notin \emptyset.$$

Por exemplo, temos $\{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 2\} = \emptyset$. E também, $\{x; x \neq x\} = \emptyset$.

Dados os conjuntos A e B, dizemos que A é *subconjunto* de B quando todo elemento de A é também elemento de B. Para indicar este fato, usa-se a notação

$$A \subset B.$$

Quando $A \subset B$, diz-se também que A é *parte* de B, que A está *incluído* em B, ou *contido* em B. A relação $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*.

Exemplo 2. Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, acima apresentados, cumprem as relações de inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Abreviadamente, escrevemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplo 3. Sejam X o conjunto dos quadrados e Y o conjunto dos retângulos. Todo quadrado é um retângulo, logo $X \subset Y$.

Quando se escreve $X \subset Y$ não está excluída a possibilidade de vir a ser $X = Y$. No caso em que $X \subset Y$ e $X \neq Y$, diz-se que X é uma *parte própria* ou um *subconjunto próprio* de Y.

Afirmar $x \in X$ equivale a afirmar $\{x\} \subset X$.

A fim de mostrar que um conjunto X não é subconjunto de um conjunto Y, deve-se obter um elemento de X que não pertença a Y. Assim, por exemplo, não se tem $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$, pois $1/2 \in \mathbb{Q}$ e $1/2$ não é inteiro.

Segue-se daí que o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto X. Com efeito, se não fosse $\emptyset \subset X$, existiria algum $x \in \emptyset$ tal que $x \notin X$. Como não existe $x \in \emptyset$, somos obrigados a admitir que

$$\emptyset \subset X, \text{ seja qual for o conjunto } X.$$

A relação de inclusão $A \subset B$ é

Reflexiva – $A \subset A$, seja qual for o conjunto A;
Anti-simétrica – se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
Transitiva – se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A verificação desses três fatos é imediata.

Segue-se da propriedade anti-simétrica que dois conjuntos A e B são iguais precisamente quando $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é, quando possuem os mesmo elementos.

Lembremos que, seja quais forem os significados dos símbolos E e D, o sinal de igualdade numa expressão como $E = D$ significa que os símbolos E e D estão sendo usados para representar o mesmo objeto. Em outras palavras, uma coisa só é igual a si mesma.

No caso de conjuntos, escrever $A = B$ significa que A e B são o *mesmo* conjunto, ou seja, que A e B possuem os mesmos elementos. Sempre que tivermos de provar uma igualdade entre conjuntos A e B, devemos demonstrar primeiro que $A \subset B$ (isto é, que todo elemento de A pertence necessariamente a B) e, depois, que $B \subset A$.

Dado um conjunto X, indica-se com $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são as partes de X. Em outras palavras, afirmar que $A \in \mathcal{P}(X)$ é o mesmo que dizer $A \subset X$. $\mathcal{P}(X)$ chama-se o *conjunto das partes* de X. Ele nunca é vazio: tem-se pelo menos $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.

Exemplo 4. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Então

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}.$$

Sejam P e Q propriedades que se referem a elementos de um certo conjunto E. As propriedades P e Q definem subconjuntos X e Y de E, a saber:

$$X = \{x \in E;\ x \text{ goza de } P\} \text{ e } Y = \{y \in E;\ y \text{ goza de } Q\}.$$

As afirmações “P implica Q”, “se P, então Q”, “P acarreta Q”, “P é condição suficiente para Q”, “Q é condição necessária para P” têm todas o mesmo significado. Elas querem dizer que $X \subset Y$, ou seja, que todo objeto que goza de P também goza de Q. Para exprimir este fato, usa-se a notação

$$P \Rightarrow Q.$$

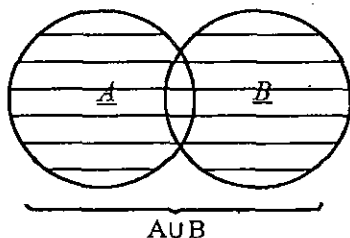
Também as afirmações “P se, e somente se, Q”, “P é condição necessária e suficiente para Q” têm todas o mesmo significado. Querem dizer que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, ou seja, que o conjunto X dos elementos que gozam da propriedade P coincide com o conjunto Y dos elementos que gozam de Q. A notação que exprime este fato é

$$P \Leftrightarrow Q.$$

2 Operações entre conjuntos

A *reunião* dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$, formado pelos elementos de A mais os elementos de B. Assim, afirmar que $x \in A \cup B$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$. Podemos então escrever:

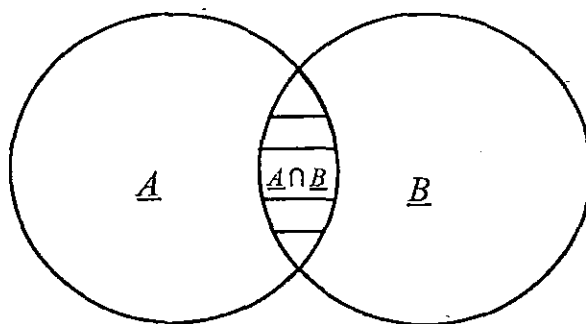
$$A \cup B = \{x;\ x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}.$$

Ao contrário da linguagem vulgar, a palavra “ou” é sempre utilizada em Matemática no sentido lato: ao dizer “$x \in A$ ou $x \in B$” quer-se afirmar que pelo menos uma dessas duas alternativas é verdadeira, sem ficar excluída a possibilidade de que ambas o sejam, isto é, de se ter ao mesmo tempo $x \in A$ e $x \in B$.

Na figura acima, onde A e B são discos, a reunião $A \cup B$ é a parte hachurada.

Sejam quais forem os conjuntos A e B, tem-se $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

A *interseção* dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$, formado pelos elementos comuns a A e B. Assim, afirmar que $x \in A \cap B$ significa dizer que se tem, ao mesmo tempo, $x \in A$ e $x \in B$. Escrevemos então

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}.$$

Pode ocorrer que não exista elemento algum x tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, tem-se $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A e B dizem-se *disjuntos*.

Na figura acima, os conjuntos A e B são representados por discos e a interseção $A \cap B$ é a parte hachurada.

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B tem-se $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

Exemplo 5. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \leq 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N};\ x > 5\}$. Então $A \cup B = \mathbb{N}$ e $A \cap B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Exemplo 6. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N};\ x > 2\}$ o conjunto dos números naturais maiores do que 2 e $B = \{x \in \mathbb{N};\ x < 3\}$ o conjunto dos números naturais menores do que 3. Então $A \cap B = \emptyset$, pois não existem números naturais x tais que $2 < x < 3$. Assim os conjuntos A e B são disjuntos.

Relacionamos nas listas abaixo as principais propriedades formais das operações de reunião e interseção.

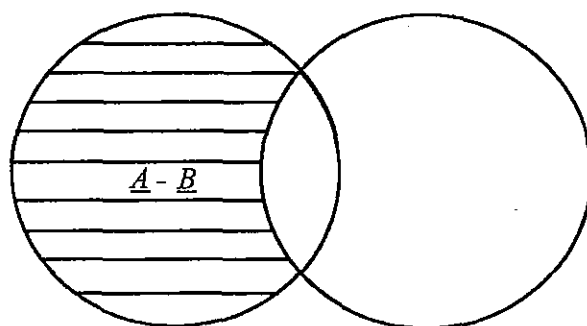
∪1) $A \cup \emptyset = A$	∩1) $A \cap \emptyset = \emptyset$
∪2) $A \cup A = A$	∩2) $A \cap A = A$
∪3) $A \cup B = B \cup A$	∩3) $A \cap B = B \cap A$
∪4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	∩4) $(A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C)$
∪5) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$	∩5) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
∪6) $A \subset B, A' \subset B' \Rightarrow$ $\Rightarrow A \cup A' \subset B \cup B'$	∩6) $A \subset B, A' \subset B' \Rightarrow$ $\Rightarrow A \cap A' \subset B \cap B'$
∪7) $A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	∩7) $A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A demonstração de qualquer dessas propriedades se reduz ao manejo adequado dos conectivos "e" e "ou". Na realidade, podemos interpretar as propriedades acima como regras formais para o manejo desses conectivos. Demonstremos uma delas, a título de exemplo.

Vamos demonstrar agora ∪7. Primeiramente provaremos que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ora, dado $x \in A \cup (B \cap C)$, tem-se $x \in A$ ou, então, $x \in B \cap C$. No primeiro caso, vem $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, donde $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. No segundo caso temos $x \in B$ e $x \in C$. De $x \in B$ segue-se $x \in A \cup B$ e de $x \in C$ conclui-se $x \in A \cup C$. Logo, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, isto é, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Em qualquer hipótese, $x \in A \cup (B \cap C)$ implica $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Isto quer dizer: $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Agora mostraremos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Para isto, seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Dentro desta situação, há duas possibilidades: ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Se for $x \notin A$, então (como $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$) deve ser $x \in B$ e $x \in C$, isto é, $x \in B \cap C$ e, portanto, $x \in A \cup (B \cap C)$. Se for $x \in A$ então evidentemente $x \in A \cup (B \cap C)$. Em qualquer hipótese, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ implica $x \in A \cup (B \cap C)$, ou seja, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, como queríamos provar.

A *diferença* entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$,

formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolos:

$$A - B = \{x;\ x \in A \quad e \quad x \notin B\}.$$

Na figura acima, onde os conjuntos A e B são representados por discos, a diferença $A - B$ é a parte hachurada.

Não se exige que B esteja contido em A para formar a diferença $A - B$. Quando A e B são disjuntos, nenhum elemento de A pertence a B, portanto, $A - B = A$. Em qualquer caso, tem-se $A - B = A - (A \cap B)$.

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se o *complementar de* B *em relação a* A e escreve-se

$$A - B = \complement_A B.$$

Freqüentemente, tem-se um conjunto E que contém todos os conjuntos que ocorrem numa certa discussão. Neste caso, a diferença $E - X$ chama-se simplesmente o *complementar de* X e indica-se com a notação $\complement X$.

Por exemplo, nos capítulos seguintes, estaremos estudando subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais. Dado $X \subset \mathbb{R}$, a diferença $\mathbb{R} - X$ será chamada o *complementar de* X e indicada pelo símbulo $\complement X$, sem necessidade de mencionar explicitamente que se trata de complementar em relação a $\mathbb{R}$.

Confirmando: se nos restringimos a considerar elementos pertencentes a um conjunto básico E, então

$$x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X.$$

Exemplo 7. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq -3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq 2\}$. Então $A - B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 3\}$ e $B - A = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq -4\}$. Tomando $\mathbb{Z}$ como conjunto básico, então $\complement A = \{\text{inteiros menores do que } -3\}$ e $\complement B = \{\text{inteiros maiores do que } 2\}$.

A noção de diferença reduz-se à de complementar, do seguinte modo: dados A e B, contidos num conjunto fundamental E, relativamente ao qual tomamos complementares, temos:

$$A - B = A \cap \complement B.$$

Com efeito $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in \complement B \Leftrightarrow x \in A \cap \complement B$.

Relacionamos abaixo as principais propriedades formais da operação de tomar complementares. Os conjuntos A e B são partes de um conjunto fundamental E, em relação ao qual estamos tomando os complementares.

$$\begin{array}{ll} \text{C1)} & \complement(\complement A) = A, \\ \text{C2)} & A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A, \\ \text{C3)} & A = \emptyset \Leftrightarrow \complement A = E, \\ \text{C4)} & \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \\ \text{C5)} & \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B. \end{array}$$

Demonstraremos estas cinco propriedades.

C1) Temos $x \in \complement(\complement A) \Leftrightarrow x \notin \complement A \Leftrightarrow x \in A$. Logo $\complement(\complement A) = A$.

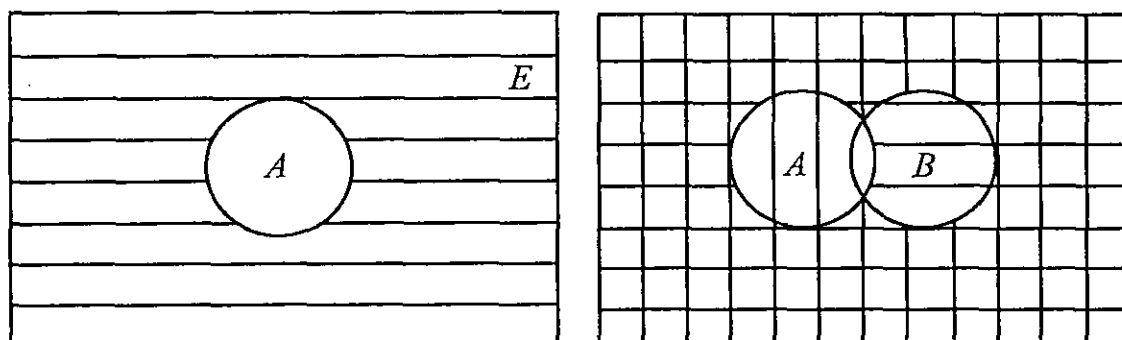
C2) Suponhamos $A \subset B$. Então um elemento $x \in \complement B$ não pode pertencer a B e, com maior razão, não pertencerá a A. Logo $x \in \complement B \Rightarrow x \in \complement A$, ou seja $\complement B \subset \complement A$. Reciprocamente, se temos $\complement B \subset \complement A$ então, pelo que acabamos de ver, deve ser $\complement(\complement A) \subset \complement(\complement B)$. Usando C1, obtemos $A \subset B$.

C3) $A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin A$ para todo $x \in E \Leftrightarrow x \in \complement A$ para todo $x \in E \Leftrightarrow \complement A = E$.

C4) Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue-se de C2 que $\complement(A \cup B) \subset \complement A$ e $\complement(A \cup B) \subset \complement B$, donde $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$.

Seja $X = \complement A \cap \complement B$. Temos $X \subset \complement A$ e $X \subset \complement B$. Por C2, vem $A \subset \complement X$ e $B \subset \complement X$, donde $A \cup B \subset \complement X$. Por C2 e C1, vem $X \subset \complement(A \cup B)$, isto é, $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$. Concluímos que $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

C5) Demonstração análoga a C4.

As propriedades acima mostram que, tomando-se complementares, invertem-se as inclusões, transformam-se reuniões em interseções e vice-versa.

Na figura à esquerda, A é um disco, contido no retângulo, que é o conjunto fundamental E. O complementar de A é a parte hachurada com listras horizontais. Na figura da direita, A e B são discos. O complementar de A é hachurado com listras horizontais e o complementar de B com listras verticais. Então $\complement(A \cup B)$ é a parte quadriculada, enquanto $\complement(A \cap B)$ é a parte que tem alguma listra (vertical, horizontal ou ambas). Isto mostra que $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Outra operação útil entre conjuntos é o produto cartesiano. Ela se baseia no conceito de par ordenado, que discutiremos agora.

Dados os objetos a, b, o *par ordenado* (a, b) fica formado quando se escolhe um desses objetos (a saber: a) para ser a *primeira coordenada* do par e (conseqüentemente) o objeto b para ser a *segunda coordenada* do par. Dois pares ordenados (a, b) e (a', b') serão chamados *iguais* quando suas primeiras

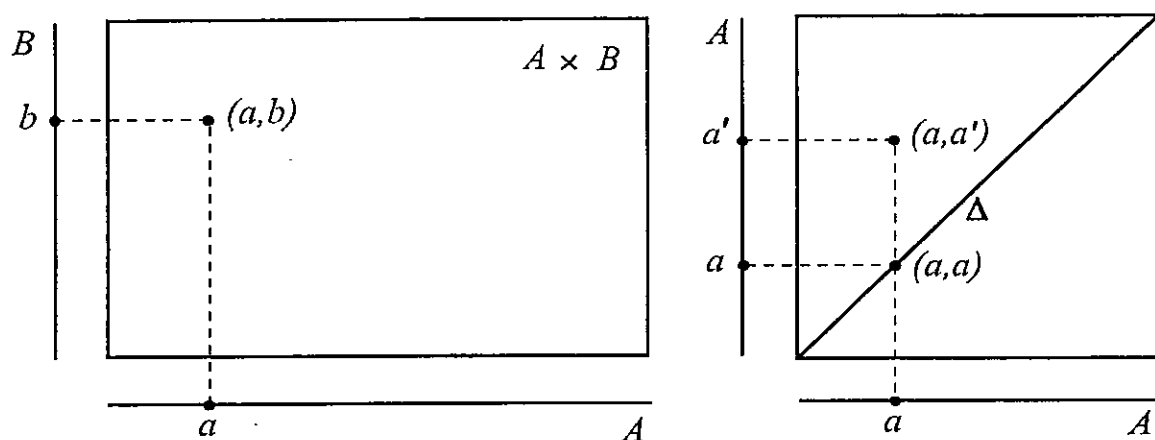
coordenadas, a e a', forem iguais e suas segundas coordenadas, b e b', também. Assim

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \text{ e } b = b'.$$

Não se deve confundir o par ordenado (a,b) com o conjunto $\{a,b\}$. Com efeito, como dois conjuntos que possuem os mesmos elementos são iguais, temos $\{a,b\} = \{b,a\}$, sejam quais forem a e b. Por outro lado, pela definição de igualdade entre pares ordenados só temos $(a,b) = (b,a)$ quando $a = b$. Notemos ainda que $\{a,a\} = \{a\}$, enquanto que (a,a) é um par ordenado legítimo.

O *produto cartesiano* dos conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados (a,b) cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda a B. Portanto:

$$A \times B = \{(a,b);\ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Quando $A = B$, temos o produto cartesiano $A^2 = A \times A$. O subconjunto $\Delta \subset A \times A$, formado pelos pares (a,a) cujas coordenadas são iguais, chama-se a *diagonal* de A^2.

Na figura à esquerda, os conjuntos A e B são representados por segmentos e o produto cartesiano $A \times B$ por um retângulo. À direita, temos o quadrado $A \times A = A^2$, no qual se destaca a diagonal Δ.

Exemplo 8. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$. Então $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$.

Exemplo 9. A introdução de coordenadas cartesianas no plano faz com que cada ponto seja representado por um par ordenado (x, y), onde x é sua abscissa e y sua ordenada. Isto identifica o plano com o produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

3 Funções

Uma *função* $f\colon A \to B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x (ou no ponto x).

Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Muitas vezes se diz a "função f" em vez de "a função $f\colon A \to B$". Neste caso, ficam subentendidos o conjunto A, domínio de f, e o conjunto B, contradomínio de f.

Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1ª Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in A$;

2ª Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em B.

Vemos que não existem funções "plurívocas". Pela segunda condição, acima, se $x = y$ em A, então, $f(x) = f(y)$ em B.

Segue-se das considerações acima que duas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon A' \to B'$ são iguais se, e somente se, $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

Exemplo 10. Sejam P o conjunto dos polígonos do plano, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f\colon P \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada polígono x sua área $f(x)$.

Exemplo 11. Sejam $A = B = \mathbb{Q}$. Tentemos definir uma função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, considerando a seguinte regra: a cada número $x \in \mathbb{Q}$, façamos corresponder o número $f(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot f(x) = 1$. Esta regra não define uma função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, pois, dado $0 \in \mathbb{Q}$, não existe número racional algum $y = f(0)$ tal que $0 \cdot y = 1$. Entretanto, se escolhermos o conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$ para domínio, a mesma regra define a função $f\colon A \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 1/x$.

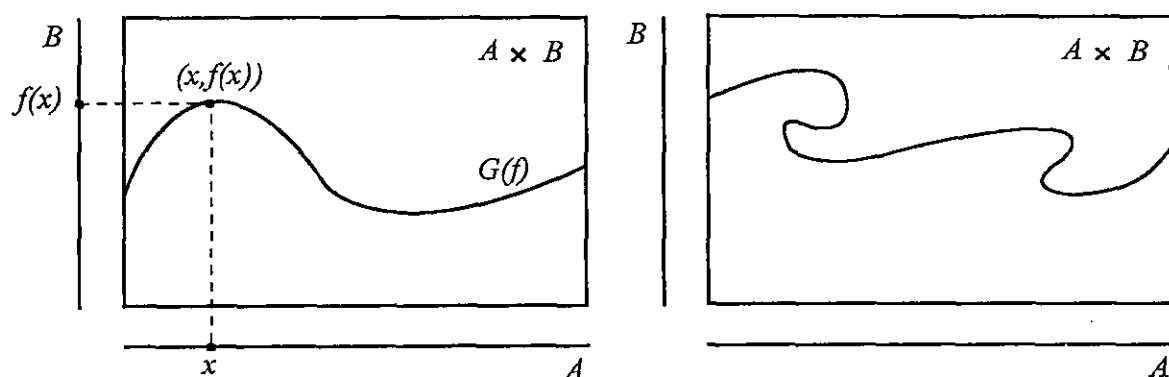
Exemplo 12. Sejam T o conjunto dos triângulos do plano e $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a tentativa de definir uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to T$ pela regra seguinte: a cada número real $x > 0$ façamos corresponder o triângulo $f(x)$, cuja área é x. Evidentemente, há ambigüidades: dado um número real $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos cuja área é x. A regra não define uma função.

O *gráfico* de uma função $f\colon A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Segue-se da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f\colon A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x. Para funções $f\colon A \to B$, onde A e B são conjuntos

de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de A, deve cortar o gráfico G num e num só ponto.

Na figura à esquerda temos o gráfico de uma função $f\colon A \to B$. A figura à direita mostra um subconjunto de $A \times B$ que não pode ser gráfico de uma função de A em B.

Uma função $f\colon A \to B$ chama-se *injetiva* (ou *biunívoca*) quando, dados x, y quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$, em B.

O exemplo mais simples de uma função injetiva é a *inclusão* $i\colon A \to B$, definida quando A é um subconjunto de B, pela regra $i(x) = x$, para todo $x \in A$.

Uma função $f\colon A \to B$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobre* B) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplos de funções sobrejetivas são as *projeções* $\pi_1\colon A \times B \to A$ e $\pi_2\colon A \times B \to B$, de um produto cartesiano $A \times B$ nos fatores A e B, respectivamente. A *primeira projeção*, π_1, é definida por $\pi_1(a, b) = a$, enquanto a *segunda projeção*, π_2, é definida por $\pi_2(a, b) = b$.

Exemplo 13. Seja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$. Então f não é injetiva, pois $f(-3) = f(3)$, embora $-3 \neq 3$. Tampouco f é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -1$. Por outro lado, se tomarmos $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3x+1$, então g

é injetiva. De fato, se $g(x) = g(y)$ então $3x+1 = 3y+1$, ou seja, $3x = 3y$, donde $x = y$. Mas g não é sobrejetiva, pois não existe um inteiro x tal que $3x + 1 = 0$, por exemplo. Finalmente, seja $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida assim: $h(1) = 1$ e, para cada número natural $x > 1$, $h(x)$ é o número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Então h é sobrejetiva, pois $h(2) = 1$, $h(6) = 2$, $h(30) = 3$, $h(210) = 4$, etc. Mas é claro que h não é injetiva. Por exemplo, se x e y são dois números primos quaisquer, tem-se $h(x) = h(y)$.

Exemplo 14. A verificação de que uma função é sobrejetiva implica em demonstrar a *existência* de objetos satisfazendo certas condições. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2$. Dizer que f é sobrejetiva significa afirmar que, para todo número real $y > 0$ existe algum número real x tal que $y = x^2$, ou seja, que todo número real positivo y possui uma raiz quadrada x. (Isto será provado quando estudarmos os números reais.) Outro exemplo: seja p um polinômio não constante, de coeficientes complexos. A cada número complexo z associemos o valor $p(z)$ do polinômio p. Isto define uma função $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. A afirmação de que p é uma função sobrejetiva é equivalente ao chamado "Teorema Fundamental da Álgebra" (um teorema de Topologia, segundo o qual todo polinômio complexo não constante possui pelo menos uma raiz complexa). Com efeito, admitindo que $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva, dado $0 \in \mathbb{C}$, deve existir algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. O número z é, portanto, uma raiz de p. Reciprocamente, admitindo que todo polinômio não-constante possui uma raiz complexa, provamos que $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva. Com efeito, dado $c \in \mathbb{C}$, a função $z \mapsto p(z)-c$ é um polinômio não-constante, logo existe algum $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) - c = 0$. Tem-se $p(z_0) = c$, donde p é sobrejetiva.

Uma função $f: A \to B$ chama-se *bijetiva* (uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca*) quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

A mais simples das bijeções é a função *identidade* $id_A : A \to A$, definida por $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $id : A \to A$, em vez de id_A.

Por exemplo, dados arbitrariamente a, b em $\mathbb{Q}$, com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = ax + b$, é uma bijeção. Com efeito, se $f(x) = f(y)$, isto é, $ax+b = ay+b$ então, somando $-b$ a ambos os membros, vem $ax = ay$. Multiplicando ambos os membros por $1/a$, obtemos $x = y$. Assim, f é injetiva. Além disso, dado $y \in Q$ qualquer, o número racional $x = (y - b)/a$ é tal que $ax + b = y$, isto é, $f(x) = y$, donde f é sobrejetiva.

Dadas uma função $f : A \to B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se *imagem* de X pela função f ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in X$. Assim

$$f(X) = \{f(x); x \in X\} = \{y \in B; y = f(x), x \in X\}.$$

Evidentemente, $f(X)$ é um subconjunto de B. Para que $f : A \to B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente que $f(A) = B$. Em geral, tem-se apenas $f(A) \subset B$. O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem da função* f. Às vezes também se diz que $f(A)$ é o *conjunto dos valores* de f.

Dada uma função $f : A \to B$ e indicando com $X, Y, \ldots$ subconjuntos de A, temos

I1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

I2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$,

I3) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$,

I4) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demonstremos as duas primeiras destas relações.

I1) Se $y \in f(X \cup Y)$, então existe $x \in X \cup Y$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in X$, temos $y \in f(X)$. Se, porém $x \in Y$, temos $y \in f(Y)$. Em qualquer caso, $y \in f(X) \cup f(Y)$. Logo $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Reciprocamente, seja $z \in f(X) \cup f(Y)$. Então $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$. No primeiro caso, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. No

segundo, existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Em qualquer hipótese, existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Assim $z \in f(X \cup Y)$, isto é, $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Estas duas inclusões mostram que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

I2) Se $y \in f(X \cap Y)$ então existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$. Então $x \in X$ e portanto $y \in f(X)$. Também $x \in Y$ e portanto $y \in f(Y)$. Logo $y \in f(X) \cap f(Y)$.

Exemplo 15. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Definimos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x^2$. Então a imagem de f, ou seja, o conjunto $f(\mathbb{R})$, é o conjunto dos números reais ≥ 0. (Aqui estamos fazendo uso do fato, a ser demonstrado mais adiante, de que todo número real positivo possui uma raiz quadrada).

Exemplo 16. Seja $f \colon A \to B$ uma função que não é injetiva. Então existem $x \neq y$ em A, com $f(x) = f(y)$. Ponhamos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. Tem-se $X \cap Y = \emptyset$, logo $f(X \cap Y) = \emptyset$. Entretanto $f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$ não é vazio. Logo, neste caso, temos $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Se, porém, $f \colon A \to B$ for injetiva, podemos provar que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A.

Com efeito, dado $y \in f(X) \cap f(Y)$, temos $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$. Logo existem $x' \in X$ e $x'' \in Y$ com $y = f(x')$ e $y = f(x'')$. Como f é injetiva, deve ser $x' = x''$ e portanto $x' \in X \cap Y$. Segue-se que $y = f(x')$ pertence a $f(X \cap Y)$, o que mostra ser $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Como a inclusão oposta é sempre verdadeira, concluímos que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Em resumo, a fim de que se tenha $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A, é necessário e suficiente que a função $f \colon A \to B$ seja injetiva.

Dada uma função $f \colon A \to B$, consideremos um conjunto $Y \subset B$. A *imagem inversa de* Y pela função f é o conjunto $f^{-1}(Y)$, formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$. Assim:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}.$$

Note-se que pode ocorrer $f^{-1}(Y) = \emptyset$ mesmo que $Y \subset B$ seja um subconjunto não-vazio. Isto se dá precisamente quando

$Y \cap f(A) = \emptyset$, isto é, quando Y não tem pontos em comum com a imagem de f. Em particular, f não é sobrejetiva. Dado $y \in B$, escrevemos $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$. Pode acontecer que $f^{-1}(y)$ possua mais de um elemento, pois f pode não ser injetiva.

Exemplo 17. Os subconjuntos do plano definidos em Geometria Analítica por meio de equações e desigualdades são imagens inversas de conjuntos. Por exemplo a reta que tem a equação $ax + by = c$ é o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by = c\}$. Consideremos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = ax + by$. Então a reta X é a imagem inversa do conjunto $\{c\}$ por f, ou seja, $X = f^{-1}(c)$. Também a circunferência cuja equação é $x^2+y^2=1$ (centro na origem e raio 1) é o conjunto $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$. Tomemos a função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Temos $C = g^{-1}(1)$.

Agora consideremos o disco D de centro na origem e raio 1.

Temos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ainda, a função definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. Tomemos o intervalo $I = [0, 1] = \{t \in \mathbb{R};\ 0 \leq t \leq 1\}$. Então o disco D é a imagem inversa do intervalo I pela função g: $D = g^{-1}(I)$.

As imagens inversas se comportam bem relativamente às operações com conjuntos. Na relação abaixo, Y e Z indicam subconjuntos de B. Dada uma função $f\colon A \to B$, temos

Inv1) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$,

Inv2) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$,

Inv3) $f^{-1}(\complement Y) = \complement f^{-1}(Y)$,

Inv4) $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$,

Inv5) $f^{-1}(B) = A$,

Inv6) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Vamos demonstrar as três primeiras.

Inv1) Temos $x \in f^{-1}(Y \cup Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Z \Leftrightarrow f(x) \in Y$ ou $f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$ ou $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.

Inv2) $x \in f^{-1}(Y \cap Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cap Z \Leftrightarrow f(x) \in Y$ e $f(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$ e $x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.

Inv3) $x \in f^{-1}(\complement Y) \Leftrightarrow f(x) \in \complement Y \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y)$ $\Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(Y)$.

4 Composição de funções

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a *função composta* $g \circ f\colon A \to C$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

Dadas $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ e $h\colon C \to D$, vale a lei associativa $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\colon A \to D$. Com efeito, para todo $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned}[(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] \\ &= h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x).\end{aligned}$$

Observamos que, mais geralmente, basta que a imagem $f(A)$ da função f esteja contida no domínio de g para que a definição $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ faça sentido e forneça a função composta $g \circ f\colon A \to C$.

Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são injetivas então $g \circ f\colon A \to C$ é injetiva. Também a composta de funções sobrejetivas é sobrejetiva. Em particular, a composta de duas bijeções é uma bijeção. Estes fatos são de verificação imediata.

Por outro lado, qualquer função $f\colon A \to B$ pode ser escrita como composta $f = h \circ f_1$ de uma função injetiva h com uma função sobrejetiva. Basta considerar $f_1\colon A \to f(A)$, definida por $f_1(x) = f(x)$, e a inclusão $h\colon f(A) \to B$.

Também podemos escrever qualquer função $f\colon A \to B$ como composta $f = \pi \circ F$ de uma função sobrejetiva π com uma função

injetiva F. Basta tomar $F\colon A \to A \times B$, onde $F(x) = (x, f(x))$ e $\pi\colon A \times B \to B$, com $\pi(x, y) = y$ (segunda projeção).

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções. Dado $X \subset A$, tem-se $(g \circ f)(X) = g(f(X))$. Se $Z \subset C$, temos $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Provemos esta última relação. Para $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(g^{-1}(Z)) &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(Z) \Leftrightarrow g(f(x)) \in Z \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in Z \Leftrightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(Z). \end{aligned}$$

A *restrição* de uma função $f\colon A \to B$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|X\colon X \to B$, definida por $(f|X)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Considerando-se a inclusão $i\colon X \to A$, temos $f \mid X = f \circ i\colon X \to B$.

Dado $X \subset A$, se $g\colon X \to B$ é a restrição de uma função $f\colon A \to B$ ao conjunto X, diz-se também que f é uma *extensão* de g. *Estender* uma função $g\colon X \to B$ ao conjunto $A \supset X$ é, portanto, obter uma função $f\colon A \to B$ que coincida com g em X, isto é, tal que $f \mid X = g$. Evidentemente há, em geral, diversas extensões da mesma função g.

Um grande número de problemas matemáticos importantes se reduzem a estender uma ou várias funções de tal modo que as extensões satisfaçam a certas condições adicionais (continuidade, analiticidade, etc.). A função que se deseja estender é chamada a "condição de contorno".

Dadas as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$, diremos que g é uma *inversa à esquerda* para f quando $g \circ f = id_A\colon A \to A$, ou seja, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.

Por exemplo, sejam A o conjunto dos números reais ≥ 0 e $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais. Consideremos $f\colon A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e $g\colon \mathbb{R} \to A$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$ se $y \geq 0$ e $g(y) = 0$ se $y < 0$. Para todo $x \in A$, temos $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$. Logo $g \circ f = id_A$ e, portanto, g é uma inversa à esquerda de f. Note-se que qualquer função $h\colon \mathbb{R} \to A$, tal que $h(y) = \sqrt{y}$ para $y \geq 0$, é uma inversa à esquerda de f. (A definição dos valores $h(y)$ para $y < 0$ pode ser qualquer, sem que fique afetada a igualdade $h \circ f = id_A$).

Uma função $f\colon A \to B$ *possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração. Se f é injetiva, para cada $y \in f(A)$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Escrevamos $x = g(y)$. Isto define uma função $g\colon f(A) \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Completamos a definição de $g\colon B \to A$ pondo, por exemplo, $g(y) = x_0$ (elemento que fixamos em A) para $y \in B - f(A)$. Obtemos $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Reciprocamente, se existe $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ então, dados x', x'' em A, $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = g(f(x')) = g(f(x'')) = x''$, e, portanto, f é injetiva.

Uma função $g\colon B \to A$ chama-se *inversa à direita* de uma função $f\colon A \to B$ quando $f \circ g = id_B\colon B \to B$, ou seja, quando $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(1) = 1$ e, se $x > 1$, $f(x) =$ número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Definamos $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $g(y) =$ menor número natural que é o produto de y fatores primos distintos. Então, para todo número natural y, temos $f(g(y)) = y$. Logo $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$ e, portanto, g é uma inversa à direita para f. Outras funções $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poderiam ser definidas com a propriedade $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$. Por exemplo, poderíamos por $h(y) =$ menor número natural divisível por 13 que é o produto de y fatores primos distintos.

Uma função $f\colon A \to B$ *possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja $f\colon A \to B$ sobrejetiva. Então, para cada $y \in B$, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Escolhamos, para cada $y \in B$, um $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e ponhamos $g(y) = x$. Isto define uma função $g\colon B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$. Logo g é uma inversa à direita de f. Reciprocamente, se existe $g\colon B \to A$ com $f \circ g = id_B$ então, para cada $y \in B$, pondo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo f é sobrejetiva.

Uma função $g\colon B \to A$ chama-se *inversa* da função $f\colon A \to B$ quando $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, isto é, quando g é inversa à

esquerda e à direita para f.

Por exemplo, seja a um número racional $\neq 0$ e definamos $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ pondo $f(x) = ax$. A função $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $g(x) = \frac{x}{a}$, é inversa de f.

Outro exemplo: dada uma função arbitrária $f\colon A \to B$, seja $G(f)$ o gráfico de f. (Lembremos que $G(f)$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde x percorre A.) Definimos uma função $F\colon A \to G(f)$ pondo $F(x) = (x, f(x))$. Seja $\pi\colon G(f) \to A$ definida por $\pi(x, f(x)) = x$. (Evidentemente, $\pi = \pi_1 \mid G(f)$ é a restrição a $G(f)$ da primeira projeção $\pi_1 : A \times B \to A$.) Então $F \circ \pi = id_{G(f)}$ e $\pi \circ F = id_A$, como se vê facilmente. Portanto π é inversa de F.

Segue-se das duas proposições anteriores que uma função $f\colon A \to B$ possui inversa se, e somente se, é uma bijeção.

Ao contrário das inversas de um só lado, se uma função $f\colon A \to B$ possui uma inversa, ela é única.

Com efeito suponhamos que $g\colon B \to A$ e $h\colon B \to A$ sejam ambas inversas de f. Então $h = h \circ id_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = id_A \circ g = g$.

O leitor atento terá notado que provamos acima um pouco mais do que enunciamos, a saber: se f possui uma inversa à esquerda, h, e uma inversa à direita, g, então $h = g$ e f tem uma inversa.

Escreveremos $f^{-1}\colon B \to A$ para indicar a inversa da bijeção $f\colon A \to B$.

Evidentemente, se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são bijeções, tem-se $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

5 Famílias

Uma família é uma função cujo valor num ponto x se indica com f_x em vez de $f(x)$.

Passemos às definições formais.

Seja L um conjunto, cujos elementos chamaremos de *índices* e representaremos genericamente por λ.

Dado um conjunto X, uma *família* de elementos de X com índices em L é uma função $x\colon L \to X$. O valor de x no ponto $\lambda \in L$ será indicado com o símbolo x_λ, em vez da notação usual $x(\lambda)$. A família x é representada pela notação $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ ou simplesmente (x_λ) quando não houver dúvida sobre o conjunto de índices L.

Tomemos, por exemplo, $L = \{1,2\}$ como conjunto de índices. Dado um conjunto X, uma família de elementos de X com índices em L é uma função $x\colon \{1,2\} \to X$. Os valores desta função nos pontos 1 e 2 são representados por x_1 e x_2. Obtém-se assim um par ordenado (x_1, x_2) de elementos de X. Reciprocamente, todo par ordenado (x_1,x_2) de elementos de X é uma família $x\colon \{1,2\} \to X$. Em suma, os pares ordenados de elementos de X são as famílias de elementos de X com índices no conjunto $L = \{1,2\}$. Ou seja, o produto cartesiano $X^2 = X \times X$ é o conjunto das funções (famílias) $x\colon \{1,2\} \to X$. Mais geralmente, dados os conjuntos X_1 e X_2, o produto cartesiano $X_1 \times X_2$ é o conjunto das famílias $x\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$ tais que $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$.

Quando $L = \{1,2,\ldots,n\}$ é o conjunto dos números naturais desde 1 até n, uma família $x\colon L \to X$ chama-se uma n-*upla* de elementos X. Uma n-upla $x = (x_i)_{i\in L}$ é comumente representada pela notação $x = (x_1,\ldots,x_n)$. O elemento x_i é chamado a i-*ésima coordenada da* n-*upla* $x = (x_1,\ldots,x_n)$.

Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de conjuntos com índices em L. (Isto que dizer: a cada $\lambda \in L$ fazemos corresponder um conjunto A_λ.) A *reunião* dessa família é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_λ. Ela é representada pela notação $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ ou, simplesmente, $\cup A_\lambda$. Assim

$$\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \{x;\ \text{existe } \lambda \in L \text{ com } x \in A_\lambda\}.$$

Ainda em outras palavras, $\cup A_\lambda$ é o conjunto dos elementos que pertencem a algum A_λ.

Analogamente, a *interseção* da família $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos os A_λ.

Notação: $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ ou simplesmente $\cap A_\lambda$. Portanto,

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x;\ x \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in L\}.$$

Quando $L = \{1, 2, \ldots, n\}$, escreve-se

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{i \in L} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Uma família com índices no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2 \ldots\}$ dos números naturais chama-se uma *seqüência*. Assim, uma seqüência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de elementos de um conjunto X é uma função $x\colon \mathbb{N} \to X$, onde o valor $x(n)$ é indicado pelo símbolo x_n e chama-se o n-*ésimo termo* da seqüência.

Dada uma seqüência de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sua reunião e sua interseção são representadas por

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \ldots,$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \ldots.$$

Exemplo 18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$A_n = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}.$$

Então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \text{ e } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{-1, 0, 1\},$$

como se vê facilmente.

Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um conjunto fundamental E, tem-se

$$\complement(\cup A_\lambda) = \cap \complement A_\lambda$$

e

$$\complement(\cap A_\lambda) = \cup \complement A_\lambda.$$

Com efeito, dado $x \in E$, temos sucessivamente $x \in \complement(\cup A_\lambda)$ $\Leftrightarrow x \notin \cup A_\lambda \Leftrightarrow$ não existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda \Leftrightarrow x \notin A_\lambda$ para todo $\lambda \in L \Leftrightarrow x \in \complement A_\lambda$, para todo $\lambda \in L \Leftrightarrow x \in \cap \complement A_\lambda$.

Isto prova a primeira igualdade. A segunda é conseqüência, levando-se em conta que $\complement\complement X = X$. Com efeito, se escrevermos $\complement A_\lambda = B_\lambda$, temos $\complement B_\lambda = A_\lambda$. Logo

$$\complement(\cap A_\lambda) = \complement(\cap \complement B_\lambda) = \complement\complement(\cup B_\lambda) = \cup B_\lambda = \cup \complement A_\lambda.$$

Exemplo 19. Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos de um conjunto E. Afirmar que $\cup A_\lambda = E$ equivale a dizer que, para todo elemento $x \in E$ existe, pelo menos, um $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Seja $B_\lambda = \complement A_\lambda$. Tem-se $\cup A_\lambda = E$ se, e somente se, a interseção dos B_λ é vazia, isto é, $\cap B_\lambda = \emptyset$. Com efeito, pelo que vimos $\cap B_\lambda = \complement(\cup A_\lambda)$.

Dada uma função $f\colon A \to B$, consideremos uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de A, e uma família $(B_\mu)_{\mu \in M}$, de subconjuntos de B. Tem-se

$$f(\cup A_\lambda) = \cup f(A_\lambda),$$
$$f(\cap A_\lambda) \subset \cap f(A_\lambda),$$
$$f^{-1}(\cup B_\mu) = \cup f^{-1}(B_\mu),$$
$$f^{-1}(\cap B_\mu) = \cap f^{-1}(B_\mu).$$

Provemos a primeira e a última dessas afirmações. Dado $y \in B$, temos:

$$\begin{aligned} y \in f(\cup A_\lambda) &\Leftrightarrow \text{existe } x \in \cup A_\lambda \text{ tal que } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \text{existem } \lambda \in L \text{ e } x \in A_\lambda, \text{ com } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } \lambda \in L \text{ tal que } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow y \in \cup f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Dado $x \in A$, temos

$$x \in f^{-1}(\cap B_\mu) \Leftrightarrow f(x) \in \cap B_\mu \Leftrightarrow f(x) \in B_\mu \text{ para todo } \mu \in M$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_\mu) \text{ para todo } \mu \in M \Leftrightarrow x \in \cap f^{-1}(B_\mu),$$

A noção de família permite considerar produtos cartesianos de uma quantidade arbitrária de conjuntos.

Dados os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, seu *produto cartesiano* $A = A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ é o conjunto formado por todas as n-uplas $a = (a_1, \ldots, a_n)$ tais que $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.

Em outras palavras, $A_1 \times \cdots \times A_n$ é o conjunto de todas as funções $a\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ tais que $a(i) = a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Esta definição estende a do produto cartesiano $A \times B$.

Quando $A_1 = \cdots = A_n = A$, o produto cartesiano $A \times \cdots \times A$ de n cópias de A é indicado com A^n. Ele consiste em todas as funções $a\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to A$, ou seja, de todas as n-uplas de elementos de A.

No produto cartesiano $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, destacam-se as projeções $\pi_1\colon A \to A_1$, $\pi_2\colon A \to A_2, \ldots, \pi_n\colon A \to A_n$. A i-ésima projeção $\pi_i\colon A \to A_i$ é definida pondo-se $\pi_i(a) = a_i$ = i-ésima coordenada da n-upla $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ em $A_1 \times \cdots \times A_n$, tem-se $a = b$ se, e somente se, $\pi_i(a) = \pi_i(b)$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Seja $X \subset A_1 \times \cdots \times A_n$. Os elementos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de X possuem n coordenadas. As funções $f\colon X \to B$, definidas em X, podem ser pensadas como *funções de n variáveis* (a primeira variável estando em A_1, a segunda em A_2, etc.) Em particular, introduzindo-se coordenadas cartesianas no plano, este se identifica com o produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. As funções $f\colon X \to \mathbb{R}$, definidas em subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^2$, são as funções reais de duas variáveis reais.

Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, seu *produto cartesiano*

$$A = \prod_{\lambda \in L} A_\lambda$$

é o conjunto das famílias $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ tais que, para cada $\lambda \in L$, tem-se $a \in A_\lambda$.

Em outras palavras, A é o conjunto de todas as funções $a\colon L \to \cup A_\lambda$ tais que $a(\lambda) = a_\lambda \in A_\lambda$ para cada $\lambda \in L$.

As *projeções* $\pi_\lambda\colon A \to A_\lambda$ são definidas por $\pi_\lambda(a) = a_\lambda$. Cada projeção π_λ é uma função sobrejetiva. Dada uma função $f\colon X \to \prod A_\lambda$, de um conjunto qualquer X no produto cartesiano dos A_λ, obtém-se, para cada $\lambda \in L$, uma função $f_\lambda\colon X \to A_\lambda$, dada por $f_\lambda = \pi_\lambda \circ f$. Assim, $f(x) = (f_\lambda(x))_\lambda \in L$ para cada $x \in X$. Reciprocamente, se é dada, para cada $\lambda \in L$, uma função $f_\lambda\colon X \to A_\lambda$, então existe uma única $f\colon X \to \prod A_\lambda$ tal que $f_\lambda = \pi_\lambda \circ f$ para cada $\lambda \in L$. Basta pôr $f(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda\in L}$ para cada $x \in X$. As funções f_λ chamam-se as *coordenadas* de f.

No caso particular em que todos os conjuntos A_λ são iguais ao mesmo conjunto A, escreve-se A^L em vez de $\prod_{\lambda\in L} A_\lambda$. A^L é portanto o conjunto de todas as funções de L em A.

Destaca-se, em especial, o produto cartesiano de uma seqüência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, o qual é representado pelas notações

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \ldots.$$

Os elementos deste conjunto são as seqüências $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ sujeitas à condição de ser $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercícios

1. Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

   1ª $X \supset A$ e $X \supset B$,

   2ª Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$.

   Prove que $X = A \cup B$.

2. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

3. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset \complement B$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $\complement A \subset B$.

4. Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap \complement B = \emptyset$.

5. Dê exemplo de conjuntos A, B, C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

6. Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, prove que $X = \complement A$.

7. Se $A \subset B$, então, $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Por outro lado, se existir C de modo que a igualdade acima seja satisfeita, então $A \subset B$.

8. Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = \emptyset$.

9. Prove que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

10. Seja $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A \Delta B = A \Delta C$ implica $B = C$. Examine a validez de um resultado análogo com $\cap, \cup$ ou $\times$ em vez de Δ.

11. Prove as seguintes afirmações:

    a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

    b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

    c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

    d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$.

12. Dada da função $f \colon A \to B$:

    a) Prove que se tem $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$, sejam quais forem os subconjuntos X e Y de A;

b) Mostre que se f for injetiva então $f(X-Y) = f(X)-f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A.

13. Mostre que a função $f\colon A \to B$ é injetiva se, e somente se, $f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \subset A$.

14. Dada a função $f\colon A \to B$, prove:

    a) $f^{-1}(f(X)) \subset X$ para todo $X \subset A$;

    b) f é injetiva se, e somente se, $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.

15. Dada $f\colon A \to B$, prove:

    a) para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$;

    b) f é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subset B$.

16. Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

    1ª) para todo $\lambda \in L$, tem-se $X \supset A_\lambda$;

    2ª) Se $Y \supset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, então $Y \supset X$.

    Prove que, nestas condições, tem-se $X = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$.

17. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $\bigcap\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$.

18. Seja $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ uma função tal que $X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$ e $f(f(X)) = X$. Prove que $f(\cup X_\lambda) = \cap f(X_\lambda)$ e $f(\cap X_\lambda) = \cup f(X_\lambda)$. [Aqui X, Y e cada X_λ são subconjuntos de A].

19. Dadas as famílias $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ e $(B_\mu)_{\mu \in M}$, forme duas famílias com índices em $L \times M$ considerando os conjuntos

$$(A_\lambda \cup B_\mu)_{(\lambda,\mu) \in L \times M} \quad \text{e} \quad (A_\lambda \cap B_\mu)_{(\lambda,\mu) \in L \times M}.$$

Prove que se tem

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu),$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

20. Seja $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Prove, ou disprove por contra-exemplo, a igualdade

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right)$$

21. Dados os conjuntos A, B, C, estabeleça uma bijeção entre $\mathcal{F}(A \times B; C)$ e $\mathcal{F}(A; \mathcal{F}(B; C))$.

Capítulo II

Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis

De posse dos conceitos gerais e dos fatos básicos a respeito de conjuntos e funções, vamos aplicá-los, neste capítulo, para estudar as noções de conjunto finito e conjunto infinito.

Deve-se a Cantor a descoberta fundamental de que há diversos tipos de infinito, bem como a análise desses tipos.

Para os nossos propósitos, é necessário apenas distinguir, quanto ao número de elementos, três tipos de conjuntos: os finitos, os enumeráveis e os não-enumeráveis. Aos leitores interessados em mais informações sobre números cardinais de conjuntos, recomendamos [Halmos] ou a memória original [Cantor].

A noção de conjunto enumerável está estritamente ligada ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Por isso iniciaremos este capítulo com uma breve apresentação da teoria dos números naturais a partir dos axiomas de Peano.

Os axiomas de Peano exibem os números naturais como "números ordinais", isto é, objetos que ocupam lugares determinados numa seqüência ordenada: 1 é o primeiro número natural, 2 é o número que vem logo depois do 1, 3 vem em seguida ao 2, etc. Mas os números naturais também podem ocorrer como

"números cardinais", isto é, como resultado de uma operação de contagem, em resposta à pergunta: quantos elementos possui este conjunto?

No §2, empregamos os números naturais para a contagem dos conjuntos finitos, mostrando como eles podem ser considerados como números cardinais e completando, portanto, sua descrição.

Na memória original [Dedekind], cuja leitura recomendamos, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é definido a partir da teoria dos conjuntos e os axiomas, hoje conhecidos com o nome de Peano, são demonstrados como teoremas. Esta maneira de obter os números naturais pode ser encontrada na exposição recente de [Halmos]. Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles (os axiomas) e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que os números *são*; (isto seria mais um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam. Embora os axiomas por ele adotados já fossem conhecidos por Dedekind, tudo indica que Peano trabalhou independentemente. De qualquer maneira, o mais importante não são quais os axiomas que ele escolheu e sim a atitude que ele adotou, a qual veio a prevalecer na Matemática atual, sob o nome de método axiomático.

Uma exposição sistemática dos sistemas numéricos utilizados na Análise Matemática pode ser feita a partir dos números naturais, através de sucessivas extensões do conceito de número: primeiro amplia-se $\mathbb{N}$ para obter o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros; em seguida estende-se $\mathbb{Z}$, passando ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, deste se passa para o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais e, daí, para o conjunto $\mathbb{C}$ dos complexos. Essa elaboração, embora instrutiva, é um processo demorado. Os leitores curiosos poderão consultar o clássico [Landau], o mais recente [Cohen e Ehrlich], ou os primeiros capítulos de [Jacy Monteiro], onde os sistemas numéricos são encarados sob o ponto de vista algébrico.

1 Números naturais

Toda a teoria dos números naturais pode ser deduzida dos três axiomas abaixo, conhecidos como *axiomas de Peano.*

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais*, e uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n, é chamado o *sucessor de* n.

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

P1. $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *injetiva.* Em outros termos: $m, n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. Ou, em palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

P2. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ *consta de um só elemento.* Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1 \neq s(n)$. Por outro lado, se $n \neq 1$ então existe um (único) $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s(n_0) = n$.

P3. (Princípio da Indução). *Se* $X \subset \mathbb{N}$ *é um subconjunto tal que* $1 \in X$ *e, para todo* $n \in X$ *tem-se também* $s(n) \in X$, *então* $X = \mathbb{N}$.

O Princípio da Indução pode também ser enunciado da seguinte maneira:

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural n gozar de $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $n + 1$ goza da propriedade $\mathcal{P}$, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

Uma demonstração na qual o axioma P3 é empregado, chama-se uma *demonstração por indução.*

Para dar um exemplo de demonstração por indução, mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $s(n) \neq n$. Com efeito, seja $X = \{n \in \mathbb{N}; s(n) \neq n\}$. Tem-se $1 \in X$, pois 1 não é sucessor de número algum, em particular $1 \neq s(1)$. Além disso $n \in X \Rightarrow n \neq s(n) \Rightarrow$ (pela injetividade de s) $s(n) \neq s[s(n)] \Rightarrow s(n) \in X$. Assim, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Como $1 \in X$, segue-se do axioma P3 que $X = \mathbb{N}$, ou seja $n \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O Princípio da Indução é muito útil pra demonstrar propo-

sições que se referem a inteiros. Ele está implícito em todos os argumentos onde se diz "e assim por diante", "e assim sucessivamente" ou "etc.".

Não menos importante do que *demonstrar* proposições por indução é saber *definir* objetos indutivamente.

As definições por indução se baseiam na possibilidade de se iterar uma função $f\colon X \to X$ um número arbitrário, n, de vezes.

Mais precisamente, seja $f\colon X \to X$ uma função cujo domínio e contradomínio são o mesmo conjunto X. A cada $n \in \mathbb{N}$ podemos, de modo único, associar uma função $f^n\colon X \to X$ de tal maneira que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Em particular, se chamarmos $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, teremos $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.

Numa exposição sistemática da teoria dos números naturais, a existência da n-ésima iterada f^n de uma função $f\colon X \to X$ é um teorema, chamado "Teorema da Definição por Indução". Não daremos sua demonstração aqui. Apenas observaremos que não nos seria possível, a estas alturas, definir f^n simplesmente como $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n vezes) pois "n vezes" é uma expressão sem sentido no contexto dos axiomas de Peano, já que um número natural n é, por enquanto, apenas um elemento do conjunto $\mathbb{N}$ (um número ordinal), sem condições de servir de resposta à pergunta "quantas vezes?", até que lhe seja dada a condição de número cardinal.

Admitamos portanto que, dada uma função $f\colon X \to X$, sabemos associar, de modo único, a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, uma função $f^n\colon X \to X$, chamada a *n-ésima iterada de* f, de tal modo que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$.

Vejamos um exemplo de definição por indução. Usando as iteradas da função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiremos a *adição* de números naturais. Dados m, $n \in \mathbb{N}$, sua soma $m+n \in \mathbb{N}$ é definida por:

$$m + n = s^n(m).$$

Assim, somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação

de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos, por definição:

$$m + 1 = s(m),$$
$$m + s(n) = s(m + n).$$

Assim, se quisermos, poderemos dispensar a notação $s(n)$ para indicar o sucessor de n e usar a notação definitiva $n + 1$ para representar esse sucessor. Isto será feito gradativamente. Com a notação definitiva, a última das igualdades acima lê-se:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Vemos que a própria definição da soma $m+n$ já contém uma indicação de que ela goza da propriedade associativa. Provaremos agora, em geral, que se tem:

$$m + (n + p) = (m + n) + p,$$

quaisquer que sejam m, n, $p \in \mathbb{N}$.

A demonstração da propriedade associativa se faz assim: seja X o conjunto dos números naturais p tais que $m + (n + p) = (m + n) + p$, quaisquer que sejam m, $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, então,

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) = s(m + (n + p)) \\ &= s((m + n) + p) = (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

(No terceiro sinal de igualdade, usamos a hipótese $p \in X$ e nos demais a definição de soma.) Logo, $p \in X \Rightarrow s(p) \in X$. Como $1 \in X$, concluímos, por indução, que $X = \mathbb{N}$, isto é, $m + (n + p) = (m + n) + p$, quaisquer que sejam m, n, $p \in \mathbb{N}$.

As propriedades formais da adição são relacionadas abaixo:

Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$;
Comutatividade: $m + n = n + m$;
Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$;
Tricotomia: dados m, $n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou, então, existe $q \in \mathbb{N}$ com $n = m + q$.

Omitimos as demonstrações dessas propriedades, que são feitas por indução.

A *relação de ordem* entre os números naturais é definida em termos da adição. Dados os números naturais m, n dizemos que m é *menor do que* n e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Nas mesmas condições, dizemos que n é *maior do que* m e escrevemos $n > m$. A notação $m \leq n$ significa que m *é menor do que ou igual a* n.

A relação $<$ goza das seguintes propriedades:

Transitividade: se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
Tricotomia: dados m, n, exatamente uma das alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n$, ou $m < n$ ou $n < m$.
Monotonicidade da adição: se $m < n$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $m + p < n + p$.

Provemos a última: $m < n$ significa que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m + q = n$. Então $(m + p) + q = n + p$, e, portanto, $m + p < n + p$.

Observemos que $m < n$ significa que, para um certo $p \in \mathbb{N}$, temos $n = s^p(m)$, isto é, n é o sucessor do sucessor ... do sucessor de m.

Introduziremos agora a multiplicação de números naturais.

Assim, como a soma $m + n$ foi definida como o resultado que se obtém quando se itera n vezes, a partir de m, a operação de tomar o sucessor, definiremos o produto $m \cdot n$ como a soma de n parcelas iguais a m, ou melhor, o resultado que se obtém quando se adiciona a m, $n - 1$ vezes, o mesmo número m.

Em termos precisos, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $f_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f_m(p) = p + m$. (Ou seja, f_m é a função "somar m"). Usaremos esta função para definir a multiplicação de números naturais.

O produto de dois números naturais é definido assim, $m \cdot 1 = m$ e $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m)$.

Em palavras: multiplicar um número m por 1 não o altera. Multiplicar m por um número maior do que 1, ou seja, por um número da forma $n+1$, é iterar n-vezes a operação de somar m, começando com m. Assim, por exemplo, $m \cdot 2 = f_m(m) = m+m$, $m \cdot 3 = (f_m)^2(m) = m+m+m$.

Lembrando a definição de $(f_m)^n$, vemos que o produto $m \cdot n$ está definido indutivamente pelas propriedades abaixo:

$$m \cdot 1 = m,$$
$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m.$$

A última igualdade acima já sugere que o produto deve gozar da propriedade distributiva

$$m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Demonstremos este fato. Seja X o conjunto dos números $p \in \mathbb{N}$ tais que $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ sejam quais forem m, $n \in \mathbb{N}$. Acabamos de observar que $1 \in X$. Além disso, se $p \in X$, concluiremos que

$$\begin{aligned}(m+n) \cdot (p+1) &= (m+n) \cdot p + m + n \\ &= m \cdot p + n \cdot p + m + n = m \cdot p + m + n \cdot p + n \\ &= m \cdot (p+1) + n \cdot (p+1).\end{aligned}$$

(Nas igualdades acima usamos, sucessivamente, a definição de produto, a hipótese de que $p \in X$, a associatividade e a comutatividade da adição e, novamente, a definição de produto).

Segue-se que $p+1 \in X$. Assim, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$, quaisquer que sejam m, n, $p \in \mathbb{N}$.

As principais propriedades da multiplicação são:

Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;
Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$;
Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$;
Distributividade: $m(n+p) = m \cdot n + m \cdot p$;
Monotonicidade: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$.

Omitiremos as demonstrações.

2 Boa ordenação e o Segundo Princípio de Indução

Seja X um conjunto de números naturais. Diz-se que um número $p \in X$ é o *menor elemento* de X (ou *elemento mínimo* de X) quando se tem $p \leq n$ para todo $n \in X$. Por exemplo, 1 é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais. Com maior razão, qualquer que seja $X \subset \mathbb{N}$ com $1 \in X$, 1 é o menor elemento de X.

Dado $X \subset \mathbb{N}$, se $p \in X$ e $q \in X$ são ambos os menores elementos de X então $p \leq q$ e $q \leq p$, donde $p = q$. Assim, o menor elemento de um conjunto é único.

Analogamente, se $X \subset \mathbb{N}$, um número $p \in X$ chama-se o *maior elemento* de X (ou *elemento máximo* de X) quando se tem $p \geq n$ para todo $n \in X$. Nem todo conjunto de números naturais possui um elemento máximo. Por exemplo, o próprio $\mathbb{N}$ não tem um maior elemento já que, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $n + 1 > n$.

Se existir o elemento máximo de um conjunto $X \subset \mathbb{N}$, ele é único. Com efeito, se $p \in X$ e $q \in X$ são ambos máximos então $p \geq q$ e $q \geq p$, donde $p = q$.

Um resultado de grande importância, até mesmo como método de demonstração, é o fato de que todo conjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento. Este fato é conhecido como o *Princípio da Boa Ordenação.*

Teorema 1. (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não-vazio* $A \subset \mathbb{N}$ *possui um elemento mínimo.*

Demonstração. Usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$, consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. (Assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A.) Se tivermos $1 \in A$, o teorema estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Se, porém, for $1 \notin A$ então $1 \in X$. Por outro lado, temos $X \neq \mathbb{N}$. (Pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e $A \neq \emptyset$.) Assim, X cumpre a primeira parte

da hipótese de P3 (contém 1) mas não satisfaz à conclusão de P3 (não é igual a $\mathbb{N}$). Logo não pode cumprir a segunda parte da hipótese. Isto quer dizer: deve existir algum $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Seja $a = n+1$. Então todos os inteiros desde 1 até n pertencem ao complementar de A mas $a = n+1$ pertence a A. Desta maneira, a é o menor elemento do conjunto A, o que demonstra o teorema.

Do Princípio da Boa Ordenação decorre uma proposição conhecida como o Segundo Princípio da Indução, que demonstraremos agora.

Teorema 2. (Segundo Princípio da Indução.) *Seja* $X \subset \mathbb{N}$ *um conjunto com a seguinte propriedade: dado* $n \in \mathbb{N}$, *se* X *contém todos os números naturais* m *tais que* $m < n$, *então* $n \in X$. *Nestas condições,* $X = \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $Y = \mathbb{N} - X$. Afirmamos que $Y = \emptyset$. Com efeito, se Y não fosse vazio, existiria um elemento mínimo $p \in Y$. Então, para todo número natural $m < p$, seria $m \in X$. Pela hipótese feita sobre X, teríamos $p \in X$, uma contradição.

O Segundo Princípio da Indução constitui um método útil para demonstração de proposições referentes a números naturais. Ele também pode ser enunciado assim: Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade relativa a números naturais. Se, dado $n \in \mathbb{N}$, do fato de todo número natural $m < n$ gozar da propriedade $\mathcal{P}$ puder ser inferido que n goza da propriedade $\mathcal{P}$, então todo número natural goza de $\mathcal{P}$.

Exemplo 1. Um número natural p chama-se *primo* quando $p \neq 1$ e não se pode escrever $p = m \cdot n$ com $m < p$ e $n < p$. O chamado Teorema Fundamental da Aritmética diz que todo número natural se decompõe, de modo único, como produto de fatores primos. A demonstração utiliza o Segundo Princípio da Indução. Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que todo número natural menor do que n possa ser decomposto como produto de fatores primos. Então, ou n é primo (e neste caso n é, de

modo trivial, um produto de fatores primos) ou então $n = m \cdot k$, com $m < n$ e $k < n$. Pela hipótese de indução, m e k são produtos de fatores primos. Segue-se que n também o é. Pelo Segundo Princípio da Indução, concluímos que todo número natural é produto de números primos. Omitimos a demonstração da unicidade.

Encerraremos este parágrafo falando do método geral de definição por indução.

Seja X um conjunto qualquer. Trata-se de definir uma função $f\colon \mathbb{N} \to X$. Suponhamos que nos seja dado o valor $f(1)$ e seja dada também uma regra que nos permita obter $f(n)$ desde que conheçamos os valores $f(m)$, para todo $m < n$. Então *existe uma, e uma só, função* $f\colon \mathbb{N} \to X$ *nessas condições.* Este é o método geral de definição por indução (ou por recorrência).

A afirmação acima constitui um teorema, cuja demonstração reduz-se à iteração de uma função auxiliar. (Veja [Gleason], p. 145.) Daremos aqui apenas alguns exemplos. Outras definições por indução serão vistas no §3, logo a seguir.

Exemplo 2. Fixado $a \in \mathbb{N}$, definamos uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, indutivamente, pondo $f(1) = a$ e $f(n+1) = a \cdot f(n)$. A função f cumpre então $f(2) = a \cdot a$, $f(3) = a \cdot a \cdot a$, etc. Logo $f(n) = a^n$. Acabamos de definir, por indução, a n-ésima potência do número natural a. Note-se que, neste caso, temos apenas a iteração da multiplicação por a, isto é, a forma mais simples de definição por indução. Os exemplos seguintes requerem a forma geral, isto é, não se reduzem imediatamente à iteração de uma função dada.

Exemplo 3. Seja $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida indutivamente por $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(n+1) = (n+1) \cdot \varphi(n)$. Então $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2 \cdot 1$, $\varphi(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$, etc. Assim, $\varphi(n) = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$, ou seja, $\varphi(n) = n!$ é o *fatorial* de n.

Exemplo 4. Definamos $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ indutivamente pondo $f(1) = 1$, $f(2) = 1/2$ e, em geral, $f(n+2) = \dfrac{f(n) + f(n+1)}{2}$: Então $f(3) = 3/4$, $f(4) = 5/8$, etc. Cada valor $f(n)$, para

$n > 2$, é a média aritmética dos dois valores anteriores de f.

Exemplo 5. A soma $a_1 + \cdots + a_n$ de uma n-upla de números naturais $a_1, \ldots, a_n$ é definida indutivamente assim: a_1 e $a_1 + a_2$ já se conhecem. Supondo que já se saiba somar n números quaisquer, põe-se, por definição, $a_1+\cdots+a_{n+1} = (a_1+\cdots+a_n)+a_{n+1}$. A primeira vista, não se vê aqui a definição de uma função $f\colon \mathbb{N} \to X$, por indução. Na realidade, porém, a soma de n números naturais (n fixo) é uma função $\sigma_n\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. O que se acabou de definir indutivamente foi a função $f\colon n \to \sigma_n$. (Qual é o contradomínio X de f?)

Exemplo 6. Também o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ de uma n-upla de números naturais é definido indutivamente: $a_1 \cdot a_2$ são conhecidos. Põe-se $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$.

3 Conjuntos finitos e infinitos

Neste parágrafo, indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ dos números naturais desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}.$$

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção

$$\varphi\colon I_n \to X.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zero elementos. No segundo caso, diremos que $n \in \mathbb{N}$ é o *número de elementos de* X, ou seja, que X possui n elementos.

Os seguintes fatos decorrem imediatamente das definições:

a) cada conjunto I_n é finito e possui n elementos;

b) se $f\colon X \to Y$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

Intuitivamente, uma bijeção $\varphi\colon I_n \to X$ significa uma *contagem* dos elementos de X. Pondo $\varphi(1) = x_1$, $\varphi(2) = x_2, \ldots, \varphi(n) = x_n$, temos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.

Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua, devemos provar que se existem duas bijeções $\varphi\colon I_n \to X$ e $\psi\colon I_m \to X$, então $m = n$. Considerando a função composta $f = \psi^{-1} \circ \varphi\colon I_n \to I_m$, basta então provar que se existe uma bijeção $f\colon I_n \to I_m$, então tem-se $m = n$. Para fixar idéias, suponhamos $m \leq n$. Daí, $I_m \subset I_n$. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito será, portanto, uma conseqüência da proposição mais geral seguinte:

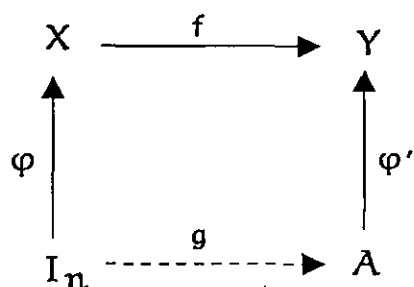
Teorema 3. *Seja* $A \subset I_n$. *Se existir uma bijeção* $f\colon I_n \to A$, *então* $A = I_n$.

Demonstração. Usaremos indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que ele seja válido para um certo n e consideremos uma bijeção $f\colon I_{n+1} \to A$. Ponhamos $a = f(n+1)$. A restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f'\colon I_n \to A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$, donde $a = n + 1$ e $A = I_{n+1}$. Se, porém, não for $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n + 1 \in A - \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n + 1$. Então definiremos uma nova bijeção $g\colon I_{n+1} \to A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n + 1$, enquanto $g(p) = a$, $g(n+1) = n + 1$. Agora, a restrição de g a I_n nos dará uma bijeção $g'\colon I_n \to A - \{n+1\}$. Evidentemente, $A - \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A - \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$. Isto conclui a demonstração.

Corolário 1. *Se existir uma bijeção* $f\colon I_m \to I_n$ *então* $m = n$. *Conseqüentemente, se existem duas bijeções* $\psi\colon I_n \to X$ *e* $\varphi\colon I_m \to X$, *deve-se ter* $m = n$.

De fato, podemos supor, para fixar as idéias, que $m \leq n$. Então $I_m \subset I_n$. Tomando-se $A = I_m$ no Teorema 3, obtemos $I_m = I_n$ e, portanto, $m = n$.

Corolário 2. *Não pode existir uma bijeção* $f: X \to Y$ *de um conjunto finito* X *sobre uma parte própria* $Y \subset X$.

De fato, sendo X finito, existe uma bijeção $\varphi: I_n \to X$. Seja $A = \varphi^{-1}(Y)$. Então A é uma parte própria de I_n e a restrição de φ a A fornece uma bijeção $\varphi': A \to Y$.

A composta $g = (\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi: I_n \to A$ seria então uma bijeção de I_n sobre sua parte própria A, o que contradiria o Teorema 3. Logo não existe a bijeção f.

Teorema 4. *Se* X *é um conjunto finito então todo subconjunto* $Y \subset X$ *é finito. O número de elementos de* Y *não excede o de* X *e só é igual quando* $Y = X$.

Demonstração. Basta provar o teorema no caso em que $X = I_n$. Isso é claro para $n = 1$ pois as únicas partes de I_1 são $\emptyset$ e I_1. Suponhamos o teorema demonstrado para I_n e consideremos um subconjunto $Y \subset I_{n+1}$. Se for $Y \subset I_n$ então, pela hipótese de indução, Y será um conjunto finito cujo número de elementos é $\leq n$ e, portanto, $\leq n+1$. Se porém, $n+1 \in Y$ então $Y - \{n+1\} \subset I_n$ e conseqüentemente (salvo no caso trivial $Y = \{n+1\}$) existe uma bijeção $\psi: I_p \to Y - \{n+1\}$, com $p \leq n$. Definiremos então uma bijeção $\varphi: I_{p+1} \to Y$, pondo $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I_p$ e $\varphi(p+1) = n+1$. Segue-se que Y é finito e seu número de elementos não excede $p+1$. Como $p \leq n$, temos $p+1 \leq n+1$. Resta apenas mostrar que se $Y \subset I_n$ tem n elementos então $Y = I_n$. Isto porém é claro pois, pelo Corolário 2, do Teorema 3, não pode haver uma bijeção de I_n sobre uma sua parte própria Y.

Corolário 1. *Seja* $f \colon X \to Y$ *uma função injetiva. Se* Y *for finito então* X *também será. Além disso, o número de elementos de* X *não excede o de* Y.

De fato, f define uma bijeção de X sobre sua imagem $f(X)$, a qual é finita, por ser uma parte do conjunto finito Y. Além disso, o número de elementos de $f(X)$, que é igual ao de X, não excede o de Y.

Corolário 2. *Seja* $g \colon X \to Y$ *uma função sobrejetiva. Se* X *for finito então* Y *também será e o seu número de elementos não excede o de* X.

De fato, como vimos no Capítulo I (§4) g possui uma inversa à direita, isto é, existe uma função $f \colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_Y$. Então g é inversa à esquerda de f e, portanto, f é uma função injetiva de Y no conjunto finito X. Segue-se do Corolário 1 que Y é finito e seu número de elementos não excede o de X.

Um conjunto X chama-se *infinito* quando não é finito. Mais explicitamente, X é infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $\varphi \colon I_n \to X$.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\varphi \colon I_n \to \mathbb{N}$, com $n > 1$, seja $p = \varphi(1) + \cdots + \varphi(n)$. Então $p > \varphi(x)$ para todo $x \in I_n$, donde $p \notin \varphi(I_n)$. Logo, nenhuma função $\varphi \colon I_n \to \mathbb{N}$ é sobrejetiva.

Outra maneira de verificar que $\mathbb{N}$ é infinito é considerar o conjunto $\mathcal{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares e definir a bijeção $f \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}$, onde $f(n) = 2n$. Como $\mathcal{P}$ é uma parte própria de $\mathbb{N}$, segue-se do Corolário 2 do Teorema 3 que $\mathbb{N}$ não é finito.

Os fatos que acabamos de estabelecer para conjuntos finitos fornecem, por exclusão, resultados sobre conjuntos infinitos. Por exemplo, se $f \colon X \to Y$ é injetiva e X é infinito, então Y também é. Dada $f \colon X \to Y$ sobrejetiva, se Y é infinito, então X é infinito. Ou então, como acabamos de usar, se X admite uma bijeção sobre uma de suas partes próprias, então X é infinito. (No parágrafo seguinte, mostraremos que a recíproca também vale.)

Outros exemplos de conjuntos infinitos são $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, pois am-

bos contêm $\mathbb{N}$. Segundo uma proposição devida a Euclides, o conjunto dos números primos é infinito. Caracterizaremos agora os subconjuntos finitos (e portanto os infinitos) de $\mathbb{N}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *limitado* quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n$ seja qual for $n \in X$.

Teorema 5. *Seja $X \subset \mathbb{N}$ não-vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *X é finito;*
(b) *X é limitado;*
(c) *X possui um maior elemento.*

Demonstração. Provaremos que (a)$\Rightarrow$(b), (b)$\Rightarrow$(c) e (c)$\Rightarrow$(a).

(a) $\Rightarrow$ (b) – Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pondo $p = x_1 + \cdots + x_n$, temos $p > x$, para todo $x \in X$, logo X é limitado.

(b) $\Rightarrow$ (c) – Supondo $X \subset \mathbb{N}$ limitado, segue-se que o conjunto $A = \{p \in \mathbb{N}; p \geq n$ para todo $n \in X\}$ é não-vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $p_0 \in A$, que é o menor elemento de A. Afirmamos que deve ser $p_0 \in X$. Com efeito, se fosse $p_0 \notin X$ então teríamos $p_0 > n$ para todo $n \in X$. Como $X \neq \emptyset$, isto obrigaria $p_0 > 1$, donde $p_0 = p_1 + 1$. Se existisse algum $n \in X$ com $p_1 < n$ isto traria $p_0 = p_1 + 1 \leq n$ e (como estamos supondo $p_0 \notin X$) $p_0 < n$, um absurdo. Logo é $p_1 \geq n$ para todo $n \in X$. Mas isto significa $p_1 \in A$, o que é absurdo em vista de $p_1 < p_0$ e $p_0 =$ menor elemento de A. Portanto deve ser $p_0 \in X$. Como $p_0 \geq n$ para todo $n \in X$, concluímos que p_0 é o maior elemento de X.

(c) $\Rightarrow$ (a) – Se existe um elemento $p \in X$ que é o maior de todos, então X está contido em I_p e por conseguinte X é finito, pelo Teorema 4.

Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *ilimitado* quando não é limitado. Isto significa que, dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, existe algum $n \in X$ tal que $n > p$. Os conjuntos ilimitados $X \subset \mathbb{N}$ são, como acabamos de ver, precisamente os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Teorema 6. *Sejam* X, Y *conjuntos finitos disjuntos, com* m *e* n *elementos respectivamente. Então* $X \cup Y$ *é finito e possui* $m+n$ *elementos.*

Demonstração. Dadas as bijeções $\varphi\colon I_m \to X$ e $\psi\colon I_n \to Y$, definamos a função $\xi\colon I_{m+n} \to X \cup Y$ pondo $\xi(x) = \varphi(x)$ se $1 \le x \le m$ e $\xi(m+x) = \psi(x)$ se $1 \le x \le n$. Como $X \cap Y = \emptyset$, constata-se imediatamente que ξ é uma bijeção, o que prova o teorema.

Corolário 1. *Sejam* $X_1, \ldots, X_k$ *conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, com* $m_1, \ldots, m_k$ *elementos respectivamente. Então* $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ *é finito e possui* $m_1 + \cdots + m_k$ *elementos.*

O corolário se obtém aplicando-se o teorema $k-1$ vezes.

Corolário 2. *Sejam* $Y_1, \ldots, Y_k$ *conjuntos finitos (não necessariamente disjuntos) com* $m_1, \ldots, m_k$ *elementos respectivamente. Então* $Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ *é finito e possui no máximo* $m_1 + \cdots + m_k$ *elementos.*

Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja $X_i = \{(x,i); x \in Y_i\}$, ou seja $X_i = Y_i \times \{i\}$. Então os X_i são dois a dois disjuntos e cada X_i possui m_i elementos. Logo $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ é finito e tem $m_1 + \cdots + m_k$ elementos, pelo Corolário 1. Ora a aplicação $f\colon X_1 \cup \cdots \cup X_k \to Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$, definida por $f(x,i) = x$, é sobrejetiva. O resultado segue-se.

Corolário 3. *Sejam* $X_1, \ldots, X_k$ *conjuntos finitos com* $m_1, \ldots, m_k$ *elementos respectivamente. O produto cartesiano* $X_1 \times \cdots \times X_k$ *é finito e possui* $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$ *elementos.*

Basta demonstrar o Corolário 3 para $k = 2$, pois o caso geral se reduz a este mediante aplicações sucessivas do mesmo resultado. Ora, dados X e Y finitos, escrevamos $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Então $X \times Y = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, onde $X_i = X \times \{y_i\}$. Como os X_i são dois a dois disjuntos e possuem o mesmo número de elementos (digamos m) que X, concluímos que $X \times Y$ possui $m + m + \cdots + m = m \cdot n$ elementos.

Corolário 4. *Se* X *e* Y *são finitos e possuem respectivamente* m *e* n *elementos, então o conjunto* $\mathcal{F}(X;Y)$ *de todas as funções* $f\colon X \to Y$ *é finito e possui* n^m *elementos.*

Consideremos primeiro o caso em que $X = I_m$. Então uma função $f\colon I_m \to Y$ é simplesmente uma m-upla de elementos de Y. Em outras palavras, $\mathcal{F}(I_m;Y) = Y \times \cdots \times Y$ (m fatores). Pelo Corolário 3, o número de elementos de $\mathcal{F}(I_m;Y)$ é n^m. O caso geral reduz-se a este. Com efeito, seja $\varphi\colon I_m \to X$ uma bijeção. A correspondência que a cada $f\colon X \to Y$ associa $f \circ \varphi\colon I_m \to Y$ é uma bijeção de $\mathcal{F}(X;Y)$ sobre $\mathcal{F}(I_m;Y)$. Logo estes dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos, a saber, n^m.

4 Conjuntos enumeráveis

Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \to X$. No segundo caso, X diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$, tem-se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Cada bijeção $f\colon \mathbb{N} \to X$ chama-se uma *enumeração* (dos elementos) de X.

Exemplo 7. A bijeção $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, $f(n) = 2n$, mostra que o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares é infinito enumerável. Analogamente, $g\colon n \mapsto 2n - 1$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números naturais ímpares, o qual é, portanto, infinito enumerável. Também o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. Basta notar que a função $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por $h(n) = 2n$ quando n é positivo e $h(n) = -2n + 1$ quando n é negativo ou zero, é uma bijeção. Logo, $h^{-1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma enumeração de $\mathbb{Z}$.

Teorema 7. *Todo conjunto infinito* X *contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Basta definir uma função injetiva $f\colon \mathbb{N} \to X$. Para isso, começamos escolhendo, em cada subconjunto não-vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos f por

indução. Pomos $f(1) = x_X$ e, supondo já definidos $f(1), \ldots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Como X não é finito, A_n não é vazio. Poremos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição indutiva da função $f: \mathbb{N} \to X$. Afirmamos que f é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ tem-se, digamos $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$ enquanto que $f(n) \in \complement\{f(1), \ldots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. A imagem $f(\mathbb{N})$ é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de X.

Corolário. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f: X \to Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.*

Com efeito, se uma tal bijeção existir, X será infinito, pelo Corolário 2 do Teorema 3. Reciprocamente, se X é infinito, contém um subconjunto infinito enumerável $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Seja $Y = (X - A) \cup \{a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$. Evidentemente, Y é uma parte própria de X. Definimos uma bijeção $f: X \to Y$ pondo $f(x) = x$ se $x \in X - A$ e $f(a_n) = a_{2n}$.

Evidentemente, o corolário acima também pode ser enunciado assim: "Um conjunto é finito se, e somente se, não admite uma bijeção sobre uma sua parte própria". Obtém-se assim uma caracterização dos conjuntos finitos na qual não intervém o conjunto $\mathbb{N}$. Esta foi a maneira como Dedekind definiu conjunto finito.

Teorema 8. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X for finito, é enumerável. Se for infinito, definiremos indutivamente uma bijeçao $f: \mathbb{N} \to X$. Poremos $f(1) =$ menor elemento de X. Suponhamos $f(1), \ldots, f(n)$ definidos de modo a satisfazerem as seguintes condições: (a) $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$; (b) pondo $B_n = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$, tem-se $f(n) < x$ para todo $x \in B_n$. Em seguida, notando que $B_n \neq \emptyset$ (pois X é infinito) definimos $f(n+1) =$ menor elemento de B_n. Isto completa a definição de $f: \mathbb{N} \to X$, de modo a serem mantidas as condições (a) e (b) para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se de (a) que f é injetiva. Por outro lado, (b) implica que f é sobrejetiva

pois se existisse algum $x \in X - F(\mathbb{N})$, teríamos $x \in B_n$ para todo n e, portanto, $x > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição, em vista do Teorema 5.

Corolário 1. *Um subconjunto de um conjunto emumerável é enumerável. Ou: se* $f\colon X \to Y$ *é injetiva e* Y *é enumerável, então* X *é enumerável.*

Uma função $f\colon X \to Y$, onde $X, Y \subset \mathbb{N}$, chama-se *crescente* quando, dados $m < n$ em X, tem-se $f(m) < f(n)$.

Corolário 2. *Dado um subconjunto infinito* $X \subset \mathbb{N}$, *existe uma bijeção crescente* $f\colon \mathbb{N} \to X$.

Isto é o que foi demonstrado no Teorema 8.

Segue-se do Teorema 8 que o conjunto dos números primos é (infinito e) enumerável.

Teorema 9. *Seja* X *um conjunto enumerável. Se* $f\colon X \to Y$ *é sobrejetiva, então,* Y *é enumerável.*

Demonstração. Existe $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Logo f é uma inversa à esquerda de g, e, portanto, g é injetiva. Segue-se que Y é enumerável. (Corolário 1 do Teorema 8.)

Teorema 10. *Sejam* X, Y *conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano* $X \times Y$ *é enumerável.*

Demonstração. Existem funções injetivas $\varphi\colon X \to \mathbb{N}$ e $\psi\colon Y \to \mathbb{N}$. Logo $g\colon X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $g(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim sendo, pelo Corolário 1 do Teorema 8, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso definimos a função $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, f é injetiva, donde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

Corolário 1. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é enumerável.*

De fato, se indicarmos por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros $\neq 0$, veremos que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Logo é também enumerável

o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Ora, a função $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, definida por $f(m,n) = \frac{m}{n}$, é sobrejetiva. Segue-se do Teorema 9 que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Corolário 2. *Sejam* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *conjuntos enumeráveis. A reunião* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *é enumerável.*

Em palavras: uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Para demonstrar tomemos, para cada $m \in \mathbb{N}$, uma função sobrejetiva $f_m\colon \mathbb{N} \to X_m$. Em seguida, definamos uma função $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(m,n) = f_m(n)$. Vê-se imediatamente que f é sobrejetiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, conclui-se do Teorema 9 que X é enumerável.

Em particular, uma reunião finita $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ de conjuntos enumeráveis é enumerável: basta aplicar o corolário acima, com $X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

Repetidas aplicações do Teorema 10 mostram que, se $X_1, \ldots, X_k$ são conjuntos enumeráveis, seu produto cartesiano $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ é enumerável. Não é verdade, porém, que o produto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ de uma seqüência de conjuntos enumeráveis seja sempre enumerável. Examinaremos este fenômeno no parágrafo seguinte.

5 Conjuntos não-enumeráveis

O principal exemplo de conjunto não-enumerável que encontraremos neste livro será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Isto será provado no capítulo seguinte. Aqui veremos, mediante um argumento simples devido a Cantor, que existem conjuntos não-enumeráveis. Mais geralmente, mostraremos que, dado qualquer conjunto X, existe sempre um conjunto cujo número cardinal é maior do que o de X.

Não definiremos o que seja o número cardinal de um conjunto.

Mas diremos que dois conjuntos X e Y têm o *mesmo número cardinal*, e escreveremos

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y),$$

para significar que existe uma bijeção $f\colon X \to Y$.

Assim, dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos de acordo com a definição dada no §3. Se X for infinito enumerável, tem-se $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$, se e somente se, Y for infinito enumerável.

Dados os conjuntos X, Y, diremos que $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ quando existir uma função injetiva $f\colon X \to Y$ mas não existir uma função sobrejetiva $f\colon X \to Y$.

O Teorema 7 mostra que, para todo conjunto infinito X, tem-se $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(X)$. Assim, o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais dos conjuntos infinitos.

Lembramos que, dados dois conjuntos X, Y, o símbolo $\mathcal{F}(X;Y)$ representa o conjunto de todas as funções $f\colon X \to Y$.

Teorema 11. (Cantor). *Sejam X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\varphi\colon X \to \mathcal{F}(X;Y)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Dada $\varphi\colon X \to \mathcal{F}(X;Y)$, indicaremos com φ_x o valor de φ no ponto $x \in X$. Assim, φ_x é uma função de X em Y. Construiremos agora uma $f \in \mathcal{F}(X;Y)$ tal que $\varphi_x \neq f$ para todo $x \in X$. Isto é feito escolhendo, para cada $x \in X$, um elemento $f(x) \in Y$, diferente de $\varphi_x(x)$. Como Y contém pelo menos dois elementos, isto é possível. A função $f\colon X \to Y$ assim obtida é tal que $f(x) \neq \varphi_x(x)$ e, portanto, $f \neq \varphi_x$, para todo $x \in X$. Logo $f \notin \varphi(X)$ e, por conseguinte, φ não é sobrejetiva.

Corolário. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos infinitos enumeráveis. O produto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ não é enumerável.*

Basta considerar o caso em que todos os X_n são iguais a $\mathbb{N}$. Neste caso, $\prod X_n = \mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{N})$, que não é enumerável, pelo Teorema 11.

O argumento usado na demonstração do Teorema 11 chama-se "método da diagonal, de Cantor". Este nome deve-se ao caso particular em que $X = \mathbb{N}$. Os elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{N};Y)$ são seqüências de elementos de Y. Para provar que nenhuma função $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{N};Y)$ é sobrejetiva, escrevemos $\varphi(1) = s_1$, $\varphi(2) = s_2, \ldots$ etc., onde $s_1, s_2, \ldots$ são seqüências de elementos de Y. Logo

$$\begin{aligned}
s_1 &= (y_{11}, y_{12}, y_{13}, \ldots) \\
s_2 &= (y_{21}, y_{22}, y_{23}, \ldots) \\
s_3 &= (y_{31}, y_{32}, y_{33}, \ldots) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Em seguida, formamos uma nova seqüência $s = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ de elementos de Y simplesmente escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $y_n \in Y$ diferente do n-ésimo termo da diagonal: $y_n \neq y_{nn}$. A seqüência s não pertence à lista das seqüências s_n (pois o n-ésimo termo de s é diferente do n-ésimo termo de s_n). Assim, nenhuma lista enumerável pode esgotar todas as funções em $\mathcal{F}(\mathbb{N};Y)$.

Como no caso particular desse teorema, consideremos o conjunto de todas as listas infinitas (enumeráveis), que se podem formar utilizando apenas os algarismos 0 e 1, como por exemplo,

$$\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots
\end{matrix}$$

O conjunto de todas essas listas de zeros e uns não é enumerável.

Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de um conjunto dado A. Considerando o conjunto de dois elementos $\{0, 1\}$, veremos agora que existe uma bijeção:

$$\xi\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{F}(A;\{0,1\}).$$

A cada $X \in \mathcal{P}(A)$, isto é, a cada subconjunto $X \subset A$, associamos a função $\xi_X \colon A \to \{0,1\}$ chamada a *função característica* do conjunto X: tem-se $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(s) = 0$ se $x \notin X$.

A correspondência $X \mapsto \xi_X$ é uma bijeção de $\mathcal{P}(A)$ sobre $\mathcal{F}(A;\{0,1\})$. Sua inversa associa a cada função $f \colon A \to \{0,1\}$ o conjunto X dos pontos $x \in A$ tais que $f(x) = 1$.

Como $\{0,1\}$ tem dois elementos, segue-se do Teorema 11 que nenhuma função $\varphi \colon A \to \mathcal{F}(A;\{0,1\})$ é sobrejetiva. Conseqüentemente, nenhuma função $\psi \colon A \to \mathcal{P}(A)$ é sobrejetiva. (Se fosse, $\varphi = \xi \circ \psi \colon A \to \mathcal{F}(A;\{0,1\})$ também seria sobrejetiva.)

Mas existe uma função injetiva evidente $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$, definida por $f(x) = \{x\}$. Concluímos então que $\text{card}(A) < \text{card}[\mathcal{P}(A)]$, para todo conjunto A.

Sobre números cardinais de conjuntos, informamos que, dados dois conjuntos A e B quaisquer, vale uma, e somente uma, das alternativas seguintes: $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ ou $\text{card}(B) < \text{card}(A)$. Além disso, se existem uma função injetiva $f \colon A \to B$ e uma função injetiva $g \colon B \to A$, existirá também uma bijeção $h \colon A \to B$. Para todos estes fatos, consulte [Halmos].

Exercícios

1. Prove que, na presença dos axiomas P1 e P2, o axioma (A) abaixo é equivalente a P3. (A) Para todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$, tem-se $A - s(A) \neq \emptyset$.

2. Dados os números naturais a, b, prove que existe um número natural m tal que $m \cdot a > b$.

3. Seja a um número natural. Se um conjunto X é tal que $a \in X$ e, além disso, $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, então X contém todos os números naturais $\geq a$.

4. Tente descobrir, independentemente, algumas das demonstrações omitidas no texto. Caso não consiga alguma, consulte um dos livros aqui citados, ou outros de sua predileção. [*Sugestão*: Praticamente todas as proposições sobre $\mathbb{N}$ se demonstram por indução.]

5. Um elemento $a \in \mathbb{N}$ chama-se *antecessor* de $b \in \mathbb{N}$ quando se tem $a < b$ mas não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Prove que, exceto 1, todo número natural possui um antecessor.

6. Use indução para demonstrar os seguintes fatos:

   a) $2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)$;

   b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$;

   c) $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, seja quais forem $a, n \in \mathbb{N}$;

   d) $n \geq 4 \Rightarrow n! > 2^n$.

7. Use o Segundo Princípio da Indução para demonstrar a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos.

8. Seja X um conjunto com n elementos. Use indução para provar que o conjunto das bijeções (ou permutações) $f: X \to X$ tem $n!$ elementos.

9. Sejam X e Y conjuntos finitos.

   a) Prove que $\text{card}(X \cup Y) + \text{card}(X \cap Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$.

   b) Qual seria a fórmula correspondente para três conjuntos?

   c) Generalize.

10. Dado um conjunto finito X, prove que uma função $f: X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva (e portanto uma bijeção).

11. Formule matematicamente e demonstre o seguinte fato (conhecido como o "princípio das gavetas"). Se $m < n$, então, de qualquer modo como se guardem n objetos em m gavetas, haverá sempre uma gaveta, pelo menos, que conterá mais de um objeto.

12. Seja X um conjunto com n elementos. Determine o número de funções injetivas $f: I_p \to X$.

13. Quantos subconjuntos com p elementos possui um subconjunto X, sabendo-se que X tem n elementos?

14. Prove que se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

15. Defina uma função sobrejetiva $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

16. Prove que se X é infinito enumerável, o conjunto das partes finitas de X também é (infinito) enumerável.

17. Seja $f: X \to X$ uma função. Um subconjunto $Y \subset X$ chama-se *estável* relativamente a f quando $f(Y) \subset Y$. Prove que um conjunto X é finito se, e somente se, existe uma função $f: X \to X$ que só admite os subconjuntos estáveis $\emptyset$ e X.

18. Seja $f: X \to X$ uma função injetiva tal que $f(X)' \neq X$. Tomando $x \in X - f(X)$, prove que os elementos x, $f(x)$, $f(f(x)), \ldots$ são dois a dois distintos.

19. Sejam X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva $f: X \to Y$ e uma função injetiva $g: Y \to X$.

20. a) Se X é finito e Y é enumerável, então $\mathcal{F}(X; Y)$ é enumerável.

    b) Para cada função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seja $A_f = \{n \in \mathbb{N}; f(n) \neq 1\}$. Prove que o conjunto X das funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que A_f é finito é um conjunto enumerável.

21. Obtenha uma decomposição $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \ldots$ tal que os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são infinitos e dois a dois disjuntos.

22. Defina $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m \cdot (2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.

23. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito. Prove que existe uma *única* bijeção crescente $f\colon \mathbb{N} \to X$.

24. Prove que todo conjunto infinito se decompõe como reunião de uma infinidade enumerável de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

25. Seja A um conjunto. Dadas duas funções $f, g\colon A \to \mathbb{N}$, defina a soma $f + g\colon A \to \mathbb{N}$, o produto $f \cdot g\colon A \to \mathbb{N}$, e dê o significado da afirmação $f \leq g$. Indicando com ξ_X a função característica de um subconjunto $X \subset A$, prove:

    a) $\xi_{X \cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$;
    b) $\xi_{X \cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X \cap Y}$. Em particular, $\xi_{X \cup Y} = \xi_X + \xi_Y \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$;
    c) $X \subset Y \Leftrightarrow \xi_X \leq \xi_Y$;
    d) $\xi_{A - X} = 1 - \xi_X$.

26. Prove que o conjunto das seqüências crescentes $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$ de números naturais não é enumerável.

27. Sejam $(\mathbb{N}, s)$ e $(\mathbb{N}', s')$ dois pares formados, cada um, por um conjunto e uma função. Suponhamos que ambos cumpram os axiomas de Peano. Prove que existe uma única bijeção $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ tal que $f(1) = 1'$, $f(s(n)) = s'(f(n))$. Conclua que:

    a) $m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$;
    b) $f(m + n) = f(m) + f(n)$ e
    c) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(m)$.

28. Dada uma seqüência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, considere os conjuntos $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$ e $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)$.

    a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n e que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n salvo para um número finito de valores de n.

    b) Conclua que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

    c) Mostre que se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n então $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

    d) Por outro lado, se $A_n \supset A_{n+1}$ para todo n então $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

    e) Dê exemplo de uma seqüência (A_n) tal que $\limsup A_n \neq \liminf A_n$.

    f) Dê exemplo de uma seqüência para a qual os dois limites coincidem mas $A_m \not\subset A_n$ quaisquer que sejam m e n.

29. Dados os conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f: A \to B$ e $g: B \to A$. Prove que existe uma bijeção $h: A \to B$. (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder.)

Capítulo III

Números Reais

Tudo quanto vai ser dito nos capítulos seguintes se referirá a conjuntos de números reais: funções definidas e tomando valores nesses conjuntos, limites, continuidade, derivadas e integrais dessas funções. Por isso vamos estabelecer agora os fundamentos da teoria dos números reais.

Nossa atitude será a seguinte. Faremos uma lista contendo vários fatos elementares a respeito de números reais. Estes fatos serão admitidos como axiomas, isto é, não serão demonstrados. Deles deduziremos certas conseqüências, que demonstraremos como teoremas. Devemos esclarecer que, não somente o que usaremos neste livro, mas TODAS as propriedades dos números reais decorrem logicamente dos axiomas que enunciaremos neste capítulo. Esses axiomas apresentam o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um corpo ordenado completo.

Como as noções de corpo e de corpo ordenado possuem interesse algébrico próprio, apresentamos os axiomas dos números reais por etapas, deixando em último lugar a existência do sup, precisamente o axioma não-algébrico, aquele que desempenhará o papel mais importante nos capítulos seguintes.

Um espírito mais crítico indagaria sobre a *existência* dos números reais, ou seja, se realmente se conhece algum exemplo de corpo ordenado completo. Em outras palavras: partindo dos números naturais (digamos, apresentados através dos

axiomas de Peano) seria possível, por meio de extensões sucessivas do conceito de número, chegar à construção dos números reais? A resposta é afirmativa. Isto pode ser feito de várias maneiras. A passagem crucial é dos racionais para os reais, a qual pode seguir o método dos cortes de Dedekind ou das seqüências de Cauchy (devido a Cantor), para citar apenas os dois mais populares.

Existem livros, como [Dedekind], [Landau], [Cohen e Ehrlich], que tratam apenas das extensões do conceito de número. Outros, como [Rudin] e [Jacy Monteiro] dedicam capítulos ao assunto. Estas são referências bibliográficas que recomendamos aos leitores interessados. Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p. 511 de [Spivak]:

"É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo..."

Assim, um processo qualquer de construção dos números reais a partir dos racionais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo o que interessa é que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Uma pergunta relevante é, porém, a seguinte: ao definir o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, não estamos sendo ambíguos? Em outras palavras, será que existem dois corpos ordenados completos com propriedades distintas? Esta é a questão da *unicidade* de $\mathbb{R}$.

Evidentemente, num sentido exageradamente estrito, não se pode dizer que existe apenas *um* corpo ordenado completo. Se construímos os números reais por meio de cortes de Dedekind, obtemos um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais. Se usamos o processo de Cantor, o corpo ordenado completo que obtemos é formado por classes de equivalência de seqüências de Cauchy. São, portanto, dois corpos ordenados completos diferentes um do outro. O ponto fundamen-

tal é que eles diferem apenas pela natureza dos seus elementos, mas não pela maneira como esses elementos se comportam. Ora, já concordamos, desde o capítulo anterior, em adotar o método axiomático, segundo o qual a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante, sendo o importante as relações entre esses objetos. Assim sendo, a maneira adequada de formular a questão da unicidade dos números reais é a seguinte: existem dois corpos ordenados completos não-isomorfos? A resposta é negativa. Dados K, L, corpos ordenados completos, existe uma única bijeção $f \colon K \to L$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. A função f chama-se um *isomorfismo* entre K e L. Ela cumpre, *ipso-facto*, a condição $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Os corpos K e L são, pois, *isomorfos*, ou seja, indistinguíveis no que diz respeito a propriedades de corpos ordenados completos.

Os Exercícios 55 e 56 no fim deste capítulo sugerem uma demonstração de que, a menos de um isomorfismo, existe apenas um corpo ordenado completo. Isto garante que os axiomas que apresentaremos a seguir descrevem os números reais sem ambigüidade alguma.

1 Corpos

Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpo*, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua *soma* $x + y \in K$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in K$. Os axiomas de corpo são os seguintes:

A. *Axiomas da adição*

A1. *Associatividade* – quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$.

A2. *Comutatividade* – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se

$x + y = y + x$.

A3. *Elemento neutro* – existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento 0 chama-se *zero*.

A4. *Simétrico* – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$.

Da comutatividade, segue-se que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$, seja qual for $x \in K$. A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a *diferença* entre x e y. A operação $(x, y) \mapsto x - y$ chama-se *subtração*.

Somando-se y a ambos os membros de uma igualdade do tipo $x-y = z$ obtém-se $x = y+z$. Analogamente, se $x = y+z$ então, somando $-y$ a ambos os membros, obtém-se $x - y = z$. Portanto, $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$. Daí decorre que o zero é único. Ou seja, se $x + \theta = x$ (para algum $x \in K$ e algum $\theta \in K$) então $\theta = x - x$, ou seja $\theta = 0$. Resulta também que todo $x \in K$ tem somente um simétrico: se $x + y = 0$, então, $y = 0 - x$, ou seja $y = -x$. Também temos $-(-x) = x$, já que $(-x) + x = 0$. Finalmente, vale a lei do corte: $x + z = y + z \Rightarrow x = y$. (Basta somar $-z$ a ambos os membros da primeira igualdade.) Concluímos assim que as regras usuais relativas à adição e subtração decorrem dos quatro axiomas acima e são, portanto, válidas em qualquer corpo. A propósito, um conjunto onde está definida apenas uma operação satisfazendo a estes axiomas é o que se chama um *grupo abeliano*.

B. *Axiomas da multiplicação*

M1. *Associatividade* – dados quaisquer x, y, z em K, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. *Comutatividade* – sejam quais forem $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. *Elemento neutro* – existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$. O elemento 1 chama-se *um*.

M4. *Inverso multiplicativo* – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso

x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Por comutatividade, segue-se que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in K$, e que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ para todo $x \neq 0$ em K.

Os axiomas acima dizem, em particular, que os elementos diferentes de 0 num corpo K formam um grupo abeliano em relação à operação de multiplicação. (O elemento neutro é 1 e, em vez do simétrico $-x$, temos o inverso x^{-1}.) Conseqüentemente, valem propriedades análogas às que foram acima demonstradas para a adição, tendo-se o cuidado de lembrar que 0 *não possui inverso multiplicativo.*

Dados x e y em K, com $y \neq 0$, escreve-se também x/y em vez de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto x/y$, definida para x qualquer e $y \neq 0$ em K, chama-se *divisão* e o resultado x/y é o *quociente* de x por y. *Não se divide por zero:* $x/0$ *não tem sentido.*

Se $y \neq 0$, tem-se $x/y = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$. Daí se deduz a utilíssima *lei do corte*: Se $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \neq 0$, então $x = y$. (É importante ter em mente que $x \cdot z = y \cdot z$ só implica $x = y$ quando se sabe, *a priori* que $z \neq 0$.) Se $x \cdot y = x$ para todo $x \in K$ então, tomando $x = 1$ obtemos $y = 1$. Isto prova a unicidade do 1. Sabendo-se apenas que $x \cdot y = x$ para um certo x, há duas possibilidades: se $x \neq 0$ então $y = 1$, pela lei do corte. Se, porém, $x = 0$ então y pode ser qualquer pois, como veremos logo a seguir, $0 \cdot y = 0$ para todo $y \in K$. Finalmente, se $x \cdot y = 1$ então, como veremos abaixo, $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e (multiplicando por x^{-1}) concluímos $y = x^{-1}$. Isto prova a unicidade do elemento inverso.

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo K acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

D1. *Axioma da distributividade.* Dados x, y, z quaisquer, em K, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Por comutatividade, tem-se também $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Resulta desse axioma que $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in K$. Com efeito, $x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x(0 + 1) = x \cdot 1 = x$, donde

$x \cdot 0 = 0$.

Por outro lado, dados $x, y \in K$ com $x \cdot y = 0$, segue-se que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$, então obtemos $x \cdot y = x \cdot 0$ e, por corte, $y = 0$. Assim, num corpo K, tem-se $x \cdot y \neq 0$ sempre que os dois fatores x e y forem ambos diferentes de zero.

No axioma da distributividade está a explicação das "regras dos sinais" da Álgebra Elementar: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ e $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. De fato, em primeiro lugar temos $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$, donde $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. Analogamente, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Logo $(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y$. Em particular, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Exemplos de corpos.

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações $(p/q) + (p'/q') = (pq' + p'q)/qq'$ e $(p/q) \cdot (p'/q') = pp'/qq'$. (Lembremos a igualdade: $p/q = p'/q' \Leftrightarrow pq' = p'q$.) O simétrico de p/q é $-p/q$. O zero é $0/q$, seja qual for $q \neq 0$. O inverso do número racional $p/q \neq 0$ é q/p.

Exemplo 2. O corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, formado apenas de dois elementos distintos 0 e 1, com as operações $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ e $1 \cdot 1 = 1$. Aqui, o simétrico de cada elemento é ele próprio (e o inverso também).

Exemplo 3. O corpo $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são os pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais. (Ou seja, como conjunto, $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.) As operações são definidas assim: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O zero é o elemento $(0, 0)$ e a unidade é o elemento $(1, 0)$. Escrevendo x para representar o par $(x, 0)$ e usando a notação $i = (0, 1)$, observamos que cada elemento $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ pode escrever-se como $z = x + iy$ e que as operações acima foram definidas de modo que os "números

complexos" da forma $z = x + iy$ se somem e multipliquem da maneira usual, com o cuidado de notar que $i^2 = -1$. $\mathbb{Q}(i)$ chama-se o *corpo dos números complexos racionais.* A verificação dos axiomas fica a cargo do leitor. Por exemplo, dado $z = (x, y) \neq 0$, tem-se $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Exemplo 4. O conjunto $\mathbb{Q}(t)$, das funções racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, onde p e q são polinômios com coeficientes racionais, sendo q não identicamente nulo. Se $u(t)$ é também não identicamente nulo, tem-se $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t) \cdot u(t)}{q(t) \cdot u(t)}$. As operações em $\mathbb{Q}(t)$ são definidas da maneira óbvia.

Para encerrar estas considerações gerais sobre corpos, observemos um fato útil. Num corpo K, $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$. Com efeito $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow x+y = 0$ ou $x - y = 0$. No primeiro caso, $x = -y$ e, no segundo, $x = y$.

2 Corpos ordenados

Um *corpo ordenado* é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos *positivos* de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

P2. Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se *negativos.*

Num corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a \in P$. No segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$. Em particular, num corpo ordenado $1 = 1 \cdot 1$ é sempre positivo.

Segue-se que $-1 \in -P$. Em particular, num corpo ordenado, -1 não é quadrado de elemento algum.

Exemplo 5. $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, no qual o conjunto P é formado pelos números racionais p/q tais que $p \cdot q \in \mathbb{N}$. (Intuitivamente, isto significa que os inteiros p e q têm "o mesmo sinal".)

Exemplo 6. O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado chamando-se uma fração $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ positiva quando, no polinômio pq, o coeficiente do termo de mais alto grau for positivo. O conjunto P das frações positivas segundo esta definição cumpre as condições P1 e P2. Com efeito, dadas as frações positivas $r = \dfrac{p}{q}$ e $r' = \dfrac{p'}{q'}$, os coeficientes dos termos de graus mais elevados em pq e em $p'q'$ são > 0. Em $r + r'$, o produto do numerador pelo denominador é o polinômio $pq(q')^2 + p'q' \cdot q^2$, cujo termo de mais alto grau deve ter coeficiente positivo. Logo, a soma de duas frações "positivas" é positiva. As demais afirmações se verificam sem dificuldade.

Exemplo 7. O corpo $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado pois $1 + 1 = 0$ enquanto num corpo ordenado 1 deve ser positivo e a soma $1+1$, de dois elementos positivos deveria ainda ser positiva. Também o corpo $\mathbb{Q}(i)$, dos números complexos racionais, não comporta uma ordenação compatível com suas operações pois o quadrado do elemento $i = (0, 1)$ é igual a -1. Num corpo ordenado, nenhum quadrado pode ser negativo e -1 sempre é negativo.

Num corpo ordenado K, escreveremos $x < y$, e diremos que x é *menor do que* y, para significar que $y - x \in P$, ou seja, que $y = x + z$, onde $z \in P$. Nas mesmas circunstâncias, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y *é maior do que* x.

Em particular $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, isto é, que $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$ tem-se sempre $x > y$.

A relação de ordem $x < y$ num corpo ordenado K goza das

propriedades seguintes:

O1. *Transitividade* – se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
O2. *Tricotomia* – dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas seguintes: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$.
O3. *Monotonicidade da adição* – se $x < y$ então, para todo $z \in K$, tem-se $x + z < y + z$.
O4. *Monotonicidade da multiplicação* – se $x < y$ então, para todo $z > 0$, tem-se $xz < yz$. Se, porém, for $z < 0$, então $x < y$ implica $xz > yz$.

Demonstremos estas propriedades:

O1. Dizer $x < y$ e $y < z$ significa afirmar que $y - x \in P$ e $z - y \in P$. Por P1 concluímos que $(z-y) + (y-x) \in P$, ou seja, $z - x \in P$, o que significa $x < z$.
O2. Dados $x, y \in K$, ou $y - x \in P$, ou $y - x = 0$, ou $y - x \in -P$ (isto é, $x - y \in P$). No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $x > y$. Estas possibilidades se excluem mutuamente, por P2.
O3. Se $x < y$ então $y - x \in P$, donde $(y+z) - (x+z) = y - x \in P$. Isso significa que $x + z < y + z$.
O4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in P$ e $z \in P$. Logo $(y-x) \cdot z \in P$, isto é, $y \cdot z - x \cdot z \in P$, o que significa $x \cdot z < y \cdot z$. Se, porém, $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in P$ e $-z \in P$, donde $(y - x) \cdot (-z) \in P$, isto é $x \cdot z - y \cdot z \in P$, o que significa $y \cdot z < x \cdot z$.

Em particular, num corpo ordenado K, $x < y$ é equivalente a $-y < -x$. Basta multiplicar ambos os membros de qualquer uma destas desigualdades por -1.

Segue-se de O1 e O3 que $x < y$ e $x' < y'$ implica $x + x' < y + y'$, ou seja, podem-se somar duas desigualdades, membro a membro. Com efeito, por O3, $x < y \Rightarrow x + x' < y + x'$ e $x' < y' \Rightarrow y + x' < y + y'$. Por O1, concluímos $x + x' < y + y'$.

Analogamente, de O1 e O4 segue-se que $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ implicam $xx' < yy'$, isto é, podem-se multiplicar membro a membro duas desigualdades formadas por elementos

positivos.

Num corpo ordenado K, o produto de um elemento $x > 0$ por um elemento $y < 0$ dá um elemento $xy < 0$. (Basta observar que $x(-y) = -(x \cdot y)$ ou então multiplicar ambos os membros de $y < 0$ por x.) Como $1 > 0$, concluímos de $x \cdot x^{-1} = 1$ que se $x > 0$ deve ser $x^{-1} > 0$ também. Assim, o inverso de um elemento positivo é positivo. Segue-se que $x > 0$ e $y > 0$ implica $x/y > 0$.

Se $x < y$ e ambos são positivos, então $y^{-1} < x^{-1}$. Basta observar que $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$.

Num corpo ordenado K, escreve-se $x \leq y$ para significar que $x < y$ ou $x = y$. Lê-se: "x é menor do que ou igual a y". Nas mesmas circunstâncias, escreve-se $y \geq x$. Isto quer dizer, evidentemente, que $y - x \in P \cup \{0\}$. Os elementos do conjunto $P \cup \{0\}$ chamam-se *não-negativos* e são caracterizados pela relação $x \geq 0$.

Tem-se, evidentemente, $x \leq x$ para todo $x \in K$.

Dados $x, y \in K$, tem-se $x = y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $y \leq x$. É muito freqüente, em Análise, provar-se que dois números x e y são iguais mostrando-se primeiro que $x \leq y$ e, depois, que $y \leq x$.

Com exceção de O2 (tricotomia), que é substituída pelas propriedades $x \leq x$ (reflexividade) e $x \leq y,\ \ y \leq x \Leftrightarrow x = y$ (anti-simetria), todas as propriedades acima demonstradas para a relação $x < y$ transferem-se para $x \leq y$.

Num corpo ordenado K, como $1 > 0$, temos $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \ldots$ e o subconjunto de K formado por estes elementos é, portanto, infinito. Mais precisamente, vamos mostrar como se pode considerar o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, naturalmente imerso em K.

Temporariamente, indiquemos com o símbolo $1'$ o elemento unidade do corpo ordenado K. Definamos uma função $f\colon \mathbb{N} \to K$ pondo $f(1) = 1'$, $f(2) = 1' + 1'$, etc. A maneira correta de definir f é por indução: $f(1) = 1'$ e $f(m+1) = f(m) + 1'$. Por indução, verifica-se que $f(m + n) = f(m) + f(n)$ e que (como todos os valores $f(n)$ são positivos) $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$.

Assim, a função $f\colon \mathbb{N} \to K$ define uma bijeção do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais sobre um subconjunto $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$, formado pelos elementos $1'$, $1' + 1'$, $1' + 1' + 1'$, etc. Costuma-se identificar $\mathbb{N}'$ com $\mathbb{N}$ e considerar os números naturais contidos em K. Isto é o que faremos. Temos $\mathbb{N} \subset K$ e voltamos a escrever 1, em vez de $1'$.

Em particular, todo corpo ordenado é infinito e tem "característica zero", isto é $1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0$ sempre.

Dado o corpo ordenado K e considerando $\mathbb{N} \subset K$, como estamos fazendo, os simétricos $-n$ dos elementos $n \in \mathbb{N}$ e mais o zero $(0 \in K)$ constituem um grupo abeliano, que se identifica com o grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset K$.

Mais ainda, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, existe o inverso $n^{-1} \in K$. Podemos, portanto, nos referir ao conjunto formado por todos os elementos $m \cdot n^{-1} = \dfrac{m}{n} \in K$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Este conjunto é um subcorpo de K (isto é, as operações de K, quando aplicadas a elementos deste conjunto dão resultados ainda no conjunto). Trata-se do menor subcorpo de K. Com efeito, todo subcorpo deve conter pelo menos 0 e 1; por adições sucessivas de 1, todo subcorpo de K deve conter $\mathbb{N}$; por tomadas de simétricos, deve conter $\mathbb{Z}$ e, por divisões em $\mathbb{Z}$, deve conter o conjunto das frações $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Evidentemente, este menor subcorpo de K identifica-se ao corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Concluímos assim que, dado um corpo ordenado K, podemos considerar, de modo natural, as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$. Por exemplo, o corpo $\mathbb{Q}(t)$ contém as frações do tipo p/q, onde p e q são polinômios constantes, inteiros, com $q \neq 0$. Estas frações formam o corpo $\mathbb{Q}$ e tem-se $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t)$.

Exemplo 8. *Desigualdade de Bernoulli.* Em todo corpo ordenado K, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1+x)^n \geq 1+nx$. Isto se demonstra por indução em n. Para $n = 1$ é óbvio. De $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$ deduz-se $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1)x$.

(Multiplicaram-se ambos os membros da desigualdade $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$ por $1+x$. Por isso foi preciso supor $x \geq -1$.) Quando $n > 1 (n \in \mathbb{N})$ e $x > -1$, tem-se, pelo mesmo argumento, a desigualdade estrita $(1+x)^n > 1+n\cdot x$, desde que seja $x \neq 0$.

Observação sobre boa ordenação

O Princípio da Boa Ordenação não se aplica imediatamente ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Existem conjuntos não-vazios de números inteiros que não possuem um menor elemento. O próprio $\mathbb{Z}$ é um deles: qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, o inteiro $n-1$ é menor do que n, logo não existe um inteiro n_0 menor do que todos os outros. Também o conjunto $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, \ldots\}$ dos inteiros pares, ou seja $A = \{2n; n \in \mathbb{Z}\}$, não possui um menor elemento. Em geral, se $X \subset \mathbb{N}$ for um conjunto infinito de números naturais, então o conjunto $-X = \{-n; n \in X\}$ é um conjunto não-vazio de números inteiros que não possui elemento mínimo.

Entretanto, podemos constatar o seguinte: *se um conjunto não-vazio* $X \subset \mathbb{Z}$ *for limitado inferiormente, isto é, se existir algum* $a \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a < x$ *para todo* $x \in X$, *então* X *possui um elemento mínimo.*

Este fato se reduz ao Princípio da Boa Ordenação do seguinte modo. Sendo $a < x$ para todo $x \in X$, concluímos que os elementos do conjunto não-vazio $A = \{x - a; x \in X\}$ são todos números inteiros positivos, isto é, $A \subset \mathbb{N}$. Logo existe $n_0 \in A$, $n_0 =$ menor elemento de A. Temos $n_0 = x_0 - a$, com $x_0 \in X$ e, como se verifica facilmente, x_0 é o menor elemento do conjunto X.

Intervalos

Num corpo ordenado K, existe a importante noção de *intervalo*. Dados $a, b \in K$, com $a < b$, usaremos as notações abaixo:

$$
\begin{array}{l|ll}
[a,b] = \{x \in K; a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] & = \{x \in K; x \leq b\} \\
[a,b) = \{x \in K; a \leq x < b\} & (-\infty, b) & = \{x \in K; x < b\} \\
(a,b] = \{x \in K; a < x \leq b\} & [a, +\infty) & = \{x \in K; a \leq x\} \\
(a,b) = \{x \in K; a < x < b\} & (a, +\infty) & = \{x \in K; a < x\} \\
 & (-\infty, +\infty) & = K
\end{array}
$$

Os quatro intervalos da esquerda têm *extremos* a e b. $[a, b]$ é um *intervalo fechado,* $[a, b)$ é *fechado à esquerda,* $(a, b]$ *é fechado à direita* e (a, b) é um *intervalo aberto.* Estes são intervalos *limitados.* Os cinco intervalos da direita são *ilimitados*: $(-\infty, b]$ é a *semi-reta* esquerda fechada, de origem b; $(-\infty, b)$ é a semi-reta esquerda aberta, de origem b; $[a, +\infty)$ é a semi-reta direita fechada, de origem a e $(a, +\infty)$ é a semi-reta direita aberta, de origem a. Finalmente, o intervalo total $(-\infty, +\infty) = K$ pode ser considerado aberto ou fechado.

Quando considerarmos um intervalo de extremos a e b, suporemos sempre $a < b$, com uma exceção que destacaremos agora. Ao tomarmos o intervalo fechado $[a, b]$, é conveniente admitir o caso em que $a = b$. O intervalo $[a, a]$ consiste em um único ponto a e chama-se *intervalo degenerado.* Todo intervalo não-degenerado é um conjunto infinito. Basta observar o seguinte: num corpo ordenado K, se $x < y$, então, $x < \frac{x+y}{2} < y$. Assim, se I for um intervalo contendo os elementos a, b, com $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ em I, tomando $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}, \ldots, x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}, \ldots$ Teremos $a < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < b$.

Num corpo ordenado K, definiremos o *valor absoluto* de um elemento x, como sendo x, se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$. Usaremos o símbolo $|x|$ para indicar o valor absoluto. Assim,

$$\text{dado } x \in K, \text{ tem-se} \begin{cases} |x| = x & \text{se} \quad x > 0 \\ |0| = 0 \\ |x| = -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

A noção de valor absoluto é da maior importância em Análise. Estudaremos agora suas propriedades.

Dado x num corpo ordenado K, ou x e $-x$ são ambos zero, ou um é positivo e o outro é negativo. Aquele, entre x e $-x$, que não for negativo, será chamado $|x|$. Portanto, $|x|$ é o maior

dos elementos x e $-x$. Este fato poderia ter sido usado como definição:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Temos, portanto, $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$. Esta última desigualdade pode ser escrita $-|x| \leq x$. Assim, temos

$$-|x| \leq x \leq |x|, \text{ para todo } x \in K.$$

Mais geralmente, vale o

Teorema 1. *Sejam* x, a *elementos de um corpo ordenado* K. *As seguintes afirmações são equivalentes;*

(i) $-a \leq x \leq a$;

(ii) $x \leq a$ *e* $-x \leq a$;

(iii) $|x| \leq a$.

Demonstração. $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow [-a \leq x \text{ e } x \leq a] \Leftrightarrow [a \geq x \text{ e } a \geq -x] \Leftrightarrow a \geq |x|$. A última equivalência se deve ao fato de ser $|x|$ o maior dos dois elementos x e $-x$.

Corolário. *Dados* $a, x, b \in K$, *tem-se* $|x-a| \leq b$ *se, e somente se,* $a - b \leq x \leq a + b$.

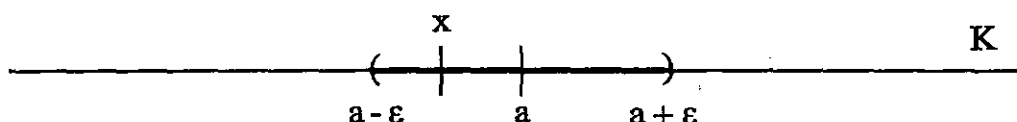
Com efeito, pelo teorema, $|x - a| \leq b$ é equivalente a $-b \leq x - a \leq b$, ou seja, $a - b \leq x \leq a + b$ (somando a).

Observação: Todas as afirmações do teorema e do seu corolário são ainda verdadeiras com $<$ em lugar de $\leq$, como se verifica facilmente.

Em particular, temos as seguintes equivalências, que serão utilizadas amplamente no estudo dos limites e das funções contínuas:

$$\boxed{x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon}$$

Se representarmos geometricamente os elementos de um corpo ordenado como pontos de uma reta, o valor absoluto $|x - a|$

significa a distância do ponto x ao ponto a. A relação $x < y$ significa que x está à esquerda de y. As equivalências acima exprimem o fato de que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a e raio ε, é formado pelos pontos x cuja distância a a é menor do que ε.

Tais interpretações geométricas não devem intervir nas demonstrações mas constituem um auxílio valiosíssimo para o entendimento dos conceitos e teoremas de Análise.

Teorema 2. *Para elementos arbitrários de um corpo ordenado* K, *valem as relações:*

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(iii) $|x| - |y| \leq \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$;

(iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Demonstração. (i) se demonstra observando que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, donde, por adição, $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Pelo Teorema 1 isto significa que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Para provar (ii), começamos notando que, seja qual for $x \in K$, temos $x^2 = |x|^2$, pois $|x|$ é um dos elementos x ou $-x$ e vale $x^2 = (-x)^2$. Logo $|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$. Segue-se daí que $|x \cdot y| = \pm |x| \cdot |y|$. Como $|x \cdot y|$ e $|x| \cdot |y|$ são ambos não-negativos, concluímos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Agora provemos (iii). Em virtude de (i), temos $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, o que dá $|x| - |y| \leq |x - y|$. Pelo mesmo motivo, temos $|y| - |x| \leq |y - x|$. Ora, é evidente que $|y - x| = |x - y|$. Concluímos que $|y| - |x| \leq |x - y|$. Assim, valem, simultaneamente, $|x - y| \geq |x| - |y|$ e $|x - y| \geq -(|x| - |y|)$. Pelo

Teorema 1, resulta que $||x|-|y|| \leq |x-y|$. A outra desigualdade em (iii) é óbvia.

A última afirmação do teorema, a desigualdade (iv), resulta de (i) aplicada à soma $x - z = (x - y) + (y - z)$.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado superiormente* quando existe $b \in K$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in K$ com esta propriedade chama-se uma *cota superior* de X.

Analogamente, $X \subset K$ diz-se *limitado inferiormente* quando existe $a \in K$ tal que $x \in X \Rightarrow a \leq x$. Um elemento $a \in K$ com esta propriedade chama-se uma *cota inferior* de X. Tem-se então $X \subset [a, +\infty)$.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado* quando é limitado superior e inferiormente, isto é, quando existem $a, b \in K$ tais que $X \subset [a, b]$.

Exemplo 9. No corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente, pois $\mathbb{N} \subset [0, \infty)$, mas não é limitado superiormente. Com efeito, dado qualquer $p/q \in \mathbb{Q}$, tem-se $|p| + 1 \in \mathbb{N}$ e $|p| + 1 > p/q$. O conjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ não é limitado superiormente nem inferiormente. Constitui talvez uma surpresa o fato de que existem corpos ordenados nos quais o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Um deles é o corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais, com a ordem introduzida no Exemplo 6. O polinômio $p(t) = t$ é uma fração com denominador 1, e, portanto, pertence a $\mathbb{Q}(t)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente do termo de mais alto grau de $t-n$ é positivo $(= 1)$, logo $t - n \in P$. Logo, temos $n < t$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p(t) = t$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}(t)$. Neste corpo, portanto, o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado.

A propósito desta situação, temos a proposição abaixo.

Teorema 3. *Num corpo ordenado* K*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset \mathsf{K}$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) *dados* $a, b \in \mathsf{K}$*, com* $a > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$*;*

(iii) *dado qualquer* $a>0$ *em* K*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Como $\mathbb{N}$ é ilimitado, dados $a > 0$ e b em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$ e, portanto, $b < a \cdot n$. Para provar que (ii) $\Rightarrow$ (iii), dado $a > 0$, existe, em virtude de (ii), um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$. Então $0 < \frac{1}{n} < a$. Finalmente, mostremos que (iii) $\Rightarrow$ (i). Dado qualquer $b > 0$ existe, por (iii) um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$, ou seja $n > b$. Assim, nenhum elemento > 0 em K pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Evidentemente, um elemento ≤ 0 também não pode. Logo $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Um corpo ordenado K chama-se *arquimediano* quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas no Teorema 3.

Assim, o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano, enquanto o corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais, com a ordem introduzida no Exemplo 6, é não-arquimediano.

3 Números reais

Sejam K um corpo ordenado e $X \subset \mathsf{K}$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathsf{K}$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K. (Às vezes se diz "extremo superior" em vez de "supremo".)

Assim, para que $b \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
S2. Se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição S1 diz que b é cota superior de X, enquanto S2 afirma que qualquer outra cota superior de X deve ser maior do que ou igual a b.

A condição S2 pode ser reformulada assim:

S2'. Dado $c < b$ em K, existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Com efeito, a condição S2' diz que nenhum elemento de K, que seja inferior a b, pode ser cota superior de X.

É imediato que se dois elementos b e b' em K cumprem as condições S1 e S2 acima, deve-se ter $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja $b = b'$. Portanto, o supremo de um conjunto, quando existe, é único. Escreveremos $\sup X$ para indicá-lo.

As condições que caracterizam o supremo podem, portanto, ser escritas assim:

S1. $x \in X \Rightarrow x \leq \sup X$;
S2. $c \geq x$ para todo $x \in X \Rightarrow c \geq \sup X$;
S2'. Se $c < \sup X$ então existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Observação: Se $X = \emptyset$ então todo $b \in K$ é cota superior de X. Como não existe menor elemento num corpo ordenado K, segue-se que o conjunto vazio $\emptyset$ não possui supremo em K. O mesmo se aplica para o ínfimo, que estudaremos agora.

Analogamente, um elemento $a \in K$ chama-se *ínfimo* de um conjunto $Y \subset K$, limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de K.

Para que $a \in K$ seja o ínfimo de $Y \subset K$ é necessário e suficiente que as condições abaixo sejam satisfeitas:

I1. Para todo $y \in Y$ tem-se $a \leq y$;
I2. Se $c \in K$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

O ínfimo de Y, quando existe, é único e escreve-se $a = \inf Y$.

A condição I2 acima pode ser reformulada nos seguintes termos:

I2'. Dado $c \in K$ com $a < c$, existe $y \in Y$ tal que $y < c$.

Isso significa que um elemento c de K, que seja maior do que a, não pode ser cota inferior de Y.

Exemplo 10. Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo, se X possuir um elemento mínimo, ele será seu ínfimo. Reciprocamente, se sup X pertence a X então é o maior elemento de X; se inf X pertencer a X, será o seu menor elemento. Em particular, todo subconjunto finito $X \subset K$ possui inf e sup. Outro exemplo: se $X = (-\infty, b]$ e $Y = [a, +\infty)$, temos $\inf Y = a$ e $\sup X = b$.

Exemplo 11. Dados $a < b$ em K, seja $X = (a, b)$ o intervalo aberto com esses extremos. Tem-se $\inf X = a$ e $\sup X = b$. Com efeito, a é, evidentemente, uma cota inferior de X. Provemos agora que nenhum $c \in K$ com $a < c$ é cota inferior de X. Isto é claro se $c \geq b$. Por outro lado, se for $a < c < b$ então $x = \dfrac{a+c}{2}$ é um elemento de X, com $a < x < c$, o que prova que c não é cota inferior de X. Assim $a = \inf X$. De modo análogo se mostra que $b = \sup X$. Neste caso, tem-se $\sup X \notin X$ e $\inf X \notin X$.

Exemplo 12. Seja $Y \subset \mathbb{Q}$ o conjunto das frações do tipo $\dfrac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\inf Y = 0$ e $\sup Y = \dfrac{1}{2}$. Com efeito, em primeiro lugar, temos $\dfrac{1}{2} \in Y$ e $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2}$ para todo $n > 1$. Logo $\dfrac{1}{2}$ é o maior elemento de Y e, por conseguinte, $\dfrac{1}{2} = \sup Y$. Por outro lado, como $0 < \dfrac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que 0 é cota inferior de Y. Resta apenas provar que nenhum número racional $c > 0$ é cota inferior de Y. Com efeito, sendo $\mathbb{Q}$ arquimediano,

dado $c > 0$, podemos obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c} - 1$. Isto significa $1 + n > \frac{1}{c}\cdot$ Ora, pela desigualdade de Bernoulli (Exemplo 8), temos $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > \frac{1}{c}$, ou seja, $\frac{1}{2^n} < c$. Logo nenhum $c > 0$ é cota inferior de Y e, portanto, $\inf Y = 0$.

A insuficiência mais grave dos números racionais, para efeitos da Análise Matemática, é o fato de que alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta.

Pitágoras e seus discípulos descobriram o seguinte

Lema. *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que se tenha $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, ou seja $p^2 = 2q^2$, com p e q inteiros. O fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição de p^2 e de q^2 em fatores primos. Logo p^2 contém um número par de fatores iguais a 2 enquanto $2q^2$ contém um número ímpar desses fatores. Assim sendo, não se pode ter $p^2 = 2q^2$.

Exemplo 13. Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$. Como $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x \notin X$, concluímos que $X \subset [0,2]$, logo X é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado, $Y \subset (0, +\infty)$, de modo que Y é limitado inferiormente. Mostraremos agora que não existem $\sup X$ nem $\inf Y$ em $\mathbb{Q}$. (É claro que existe $\inf X = 0$, pois 0 é o menor elemento de X.) Para isto, estabeleceremos os seguintes fatos:

A) *O conjunto X não possui elemento máximo.* Com efeito, dado $x \in X$ (isto é, dado um número racional não-negativo cujo quadrado é inferior a 2), tomamos um número racional $r < 1$ tal que $0 < r < (2-x^2)/(2x+1)$. Afirmamos que $x+r$ ainda pertence

a X. Com efeito, de $r < 1$ segue-se $r^2 < r$. Da outra desigualdade que r satisfaz segue-se $r(2x+1) < 2 - x^2$. Por conseguinte, $(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$. Assim, dado qualquer $x \in X$, existe um número maior, $x + r \in X$.

B) *O conjunto* Y *não possui elemento mínimo.* De fato, dado qualquer $y \in Y$, temos $y > 0$ e $y^2 > 2$. Logo podemos obter um número racional r tal que $0 < r < \frac{y^2 - 2}{2y} \cdot$ Então $2ry < y^2 - 2$ e daí $(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$. Note-se também que $r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}$, donde $r < y$, isto é, $y - r$ é positivo. Assim, dado $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $y - r \in Y$, $y - r < y$.

C) *Se* $x \in X$ *e* $y \in Y$, *então* $x < y$. Com efeito, tem-se $x^2 < 2 < y^2$ e, portanto, $x^2 < y^2$. Como x e y são ambos positivos, conclui-se que $x < y$. (A rigor, poderia ser $x = 0$, mas, neste caso, a conclusão $x < y$ é óbvia.)

Usando os fatos **A**, **B** e **C** mostremos que, entre os números racionais, não existem $\sup X$ nem $\inf Y$.

Suponhamos, primeiro, que existisse $a = \sup X$. Seria forçosamente $a > 0$. Não poderia ser $a^2 < 2$ porque isto obrigaria $a \in X$ e, então, a seria o elemento máximo de X, que não existe, por **A**. Tampouco poderia ser $a^2 > 2$, porque isto faria $a \in Y$. Como, em virtude de **B**, Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$. Usando **C**, concluiríamos que $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = \sup X$.

Assim, se existir $a = \sup X$, deverá ser $a^2 = 2$. Mas, pelo Lema de Pitágoras, nenhum número racional existe com esta propriedade. Concluímos que em $\mathbb{Q}$ o conjunto X não possui supremo.

Um raciocínio inteiramente análogo, baseado nos fatos **A**, **B** e **C**, mostraria que o número $b = \inf Y$, se existir, deve satisfazer $b^2 = 2$, e, portanto, Y não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Ao mesmo tempo, estes argumentos mostram que, se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não-vazio, limitado

superiormente, possua supremo, existirá, nesse dito corpo, um elemento $a > 0$ cujo quadrado é 2. Com efeito, tal corpo, sendo ordenado contém $\mathbb{Q}$, logo contém o conjunto X e nele existirá $a = \sup X$, cujo quadrado, não podendo ser menor nem maior do que 2, deverá ser igual a 2. Escreve-se $a = \sqrt{2}$.

Exemplo 14. Vejamos agora outro exemplo de um conjunto limitado superiormente num corpo ordenado K, o qual não possui supremo em K. Para isso, tomemos um corpo não-arquimediano K. O conjunto $\mathbb{N} \subset K$ é limitado superiormente. Se $b \in K$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$ então $n + 1 \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que $n \leq b - 1$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, se $b \in K$ for uma cota superior de $\mathbb{N}$, $b - 1$ também o será. Como $b - 1 < b$, segue-se que, num corpo não-arquimediano K, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado superiormente mas não existe $\sup \mathbb{N}$ em K.

Um corpo ordenado K chama-se *completo* quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo. Com efeito, dado Y, seja $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então X é não-vazio e limitado superiormente; logo existe $a = \sup X$. Como se vê facilmente, tem-se $-a = \inf Y$.

Segue-se do Exemplo 14 acima que *todo corpo ordenado completo é arquimediano.*

Adotaremos, a partir de agora, o axioma fundamental da Análise Matemática.

Axioma. *Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais.*

Passaremos a examinar agora algumas propriedades dos números reais que resultam imediatamente da definição de $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Voltamos a enfatizar que, em todo o restante deste livro, as

únicas propriedades dos números reais que usaremos são aquelas que decorrem de ser $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo. Isto inclui, evidentemente, as proposições demonstradas no início deste capítulo sobre corpos e corpos ordenados em geral.

Como foi observado no fim do Exemplo 13, existe em $\mathbb{R}$ um número positivo a tal que $a^2 = 2$. Este número é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$. É claro que só existe um número positivo cujo quadrado é 2, pois $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow 0 = a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow a + b = 0$ ou $a - b = 0$. No primeiro caso, $a = -b$ (logo não podem ser a e b ambos positivos) e no segundo $a = b$. Pelo Lema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Aos elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, aos números reais que não são racionais, chamaremos *números irracionais*. Assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Veremos outros logo mais.

Provaremos agora que, dados $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, existe um único número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número b chama-se a *raiz* n*-ésima* de a e é representado pelo símbolo $b = \sqrt[n]{a}$. A demonstração imita o argumento usado no Exemplo 13. Vejamo-la.

Consideramos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0, x^n < a\}$. O conjunto X é não-vazio (pois $0 \in X$) e é limitado superiormente. (Se $a < 1$, então, 1 é uma cota superior de X. Se $a > 1$, então $a^n > a$ e daí a é uma cota superior de X.)

Seja $b = \sup X$. Afirmamos que $b^n = a$. Isto se baseia nos seguintes fatos:

A) *O conjunto* X *não possui elemento máximo.* Dado $x \in X$ qualquer, provaremos que é possível tomar $d > 0$ tão pequeno que ainda se tenha $(x + d)^n < a$, isto é $x + d \in X$. Para isto, usaremos um fato auxiliar, que demonstraremos por indução. Trata-se do seguinte: dado $x > 0$ existe, para cada n, um número real positivo A_n (dependendo de x) tal que $(x + d)^n \leq x^n + A_n \cdot d$, seja qual for d com $0 < d < 1$. Isto é claro para $n = 1$. Supondo verdadeiro para n, temos $(x+d)^{n+1} = (x+d)^n(x+d) \leq (x^n + A_n \cdot d)(x + d) = x^{n+1} + A_n \cdot d \cdot x + d \cdot x^n + A_n \cdot d^2 = x^{n+1} + (A_n \cdot x + x^n + A_n \cdot d) \cdot d < x^{n+1} + (A_n \cdot x + x^n + A_n) \cdot d$

(já que $0 < d < 1$). Tomando $A_{n+1} = A_n \cdot x + x^n + A_n$, obtemos $(x+d)^{n+1} < x^{n+1} + A_{n+1} \cdot d$.

Agora, se $x \in X$, isto é, $x \geq 0$ e $x^n < a$, tomamos d tal que $d < 1$ e $0 < d < \dfrac{a - x^n}{A_n}$. Teremos $x^n + A_n \cdot d < a$ e, por conseguinte, $(x+d)^n < a$, o que prova que X não possui elemento máximo.

B) *O conjunto* $Y = \{y \in \mathbb{R}; y > 0, y^n > a\}$ *não possui elemento mínimo.* Seja $y \in Y$. Escolheremos d, com $0 < d < y$, tal que $(y-d)^n > a$, isto é, $y - d \in Y$. Para tal observemos que, sendo $0 < d < y$, temos $(y-d)^n = y^n(1 - \frac{d}{y})^n > y^n(1 - n \cdot \frac{d}{y}) = y^n - ny^{n-1} \cdot d$, como resulta da desigualdade de Bernoulli (Exemplo 8), com $x = -\dfrac{d}{y}$. Se tomarmos $0 < d < \dfrac{y^n - a}{n \cdot y^{n-1}}$ obteremos então $y^n - ny^{n-1} d > a$ e, portanto, $(y-d)^n > a$. Isto mostra que Y não possui elemento mínimo.

C) *Se* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *então* $x < y$. De fato, nestas condições $x^n < a < y^n$ e, como x e y são positivos, vem $x < y$. (O caso $x = 0$ dá $x < y$ obviamente.)

Deduz-se de **A**, **B** e **C** que o número $b = \sup X$ satisfaz à condição $b^n = a$. Com efeito, se fosse $b^n < a$ então b pertenceria ao conjunto X do qual é supremo, logo b seria o elemento máximo de X, o que contradiz **A**. Também não pode ser $b^n > a$ porque então $b \in Y$ e como, por **B**, Y não possui elemento mínimo, haveria um $c \in Y$ com $c < b$. Por **C**, viria $x < c < b$ para todo $x \in X$: c seria uma cota superior de X menor do que $b = \sup X$, outra contradição. Logo, deve ser $b^n = a$.

De agora em diante, todos os intervalos que considerarmos se referirão ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Pelo que acabamos de ver, dado $n \in \mathbb{N}$, a função $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^n$, é sobrejetiva. É claro que $0 < x < y$ implica $0 < x^n < y^n$ (pela monotonicidade da multiplicação). Logo f é injetiva e portanto é uma bijeção de $[0, +\infty)$ sobre si mesmo. Sua função inversa é dada

por $y \mapsto \sqrt[n]{y}$, a raiz n-ésima (positiva única) de $y > 0$.

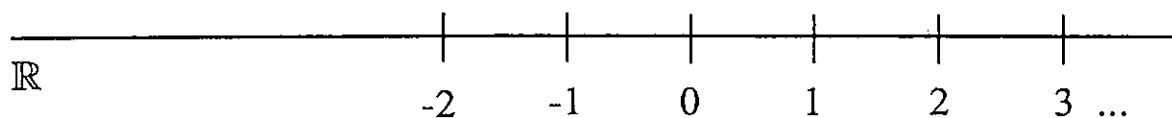
O Lema de Pitágoras mostra que o número real $\sqrt{2}$ não é racional. Generalizando este fato, provaremos agora que, dado um $n \in \mathbb{N}$, se um número natural m não possui uma raiz n-ésima natural também não possuirá uma raiz n-ésima racional. Com efeito, seja $\left(\frac{p}{q}\right)^n = m$. Podemos supor p e q primos entre si. Então p^n e q^n também serão primos entre si. Mas temos $p^n = q^n \cdot m$, o que implica ser q^n um divisor de p^n. Absurdo, a menos que fosse $q = 1$. Em suma, dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Os números reais que não são racionais, isto é, os elementos do conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, são chamados *números irracionais*. Acabamos de ver que eles existem: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$, etc. são números irracionais. Mas há muitos outros, obtidos de modos bem mais complicados do que simplesmente extrair raízes não-inteiras de números inteiros ou mesmo resolver equações algébricas com coeficientes inteiros. (Vide Exercícios 44, 45 e 46.)

Mostraremos agora que os números irracionais se acham espalhados por toda parte entre os números reais. Em seguida, provaremos que há mais números irracionais do que racionais. Para explicar precisamente o que significa "espalhados por toda parte", começaremos com uma definição.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *denso em* $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X.

Em outras palavras, diremos que o conjunto X de números reais é denso em $\mathbb{R}$ quando, dados arbitrariamente $a < b$ em $\mathbb{R}$, for possível encontrar $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Por exemplo, seja $X = \complement\mathbb{Z}$ o conjunto dos números reais que não são inteiros. X é denso em $\mathbb{R}$. Com efeito, todo intervalo (a, b) é um conjunto infinito, enquanto existe no máximo um número finito de inteiros n tais que $a < n < b$. Logo qualquer intervalo (a, b) contém elementos de X (isto é, números reais não-inteiros).

É recomendável pensar nos números reais como pontos de uma reta, sendo a distância de x a y dada por $|x-y|$ e significando a relação $x < y$ que x está à esquerda de y. Neste caso, os números inteiros acham-se a uma distância inteira ≥ 1 uns dos outros. A imagem geométrica deixa evidente que $\complement\mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$, embora não deva intervir na demonstração deste fato.

Teorema 4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja (a,b) um intervalo aberto qualquer em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a,b). Como $b-a>0$, existe um número natural p tal que $0<\frac{1}{p}<b-a$. Os números da forma $\frac{m}{p}$, $m\in\mathbb{Z}$, decompõem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}\cdot$ Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b-a$ do intervalo (a,b), algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair dentro de (a,b). Esta é a idéia intuitiva da demonstração. Raciocinemos agora logicamente. Seja $A=\left\{m\in\mathbb{Z};\frac{m}{p}\geq b\right\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b\cdot p$. Seja $m_0\in A$ o menor elemento de A. Então $b\leq\frac{m_0}{p}$ mas, como $m_0-1<m_0$, tem-se $\frac{m_0-1}{p}<b$. Afirmamos que $a<\frac{m_0-1}{p}<b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0-1}{p}\leq a<b\leq\frac{m_0}{p}$. Isto acarretaria $b-a\leq\frac{m_0}{p}-\frac{m_0-1}{p}=\frac{1}{p}$, uma contradição. Logo, o número racional $\frac{m_0-1}{p}$ pertence ao

intervalo (a, b). Para obter um número irracional no intervalo (a, b), tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, ou seja $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m\sqrt{2}}{p}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, são (salvo $m = 0$) irracionais e dividem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a, b), conclui-se que algum $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ deve pertencer a (a, b). A demonstração formal se faz como no caso anterior: se m_0 for o menor inteiro tal que $b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$ então o número irracional $\frac{(m_0 - 1)\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b).

O teorema abaixo, às vezes chamado "Princípio dos Intervalos Encaixados", é usado por alguns autores na definição dos números reais.

Teorema 5. *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ *uma seqüência decrescente de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$. *A interseção* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real* x *tal que* $x \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mais precisamente, temos* $\cap I_n = [a, b]$, *onde* $a = \sup a_n$ *e* $b = \inf b_n$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Chamemos de A o conjunto dos a_n e B o conjunto dos b_n. A é limitado: a_1 é uma cota inferior e cada b_n é uma cota superior de A. Por motivo semelhante, B é também limitado. Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é cota superior de A, temos $a \leq b_n$ para cada n. Assim, a é cota inferior de B e,

portanto, $a \leq b$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a \leq b \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Concluímos que a e b (podendo ser $a = b$!) pertencem a todos os I_n, donde $[a,b] \subset I_n$ para cada n. Logo $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Mais ainda, nenhum $x < a$ pode pertencer a todos os intervalos I_n. Com efeito, sendo $x < a = \sup A$, existe algum $a_n \in A$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin I_n$. Do mesmo modo, $y > b \Rightarrow y > b_m$ para algum m, donde $y \notin I_m$. Concluímos então que $\cap I_n = [a,b]$.

Usaremos o Teorema 5 para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Teorema 6. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Dados um intervalo limitado, fechado $I = [a,b]$, com $a < b$, e um número real x_0, existe um intervalo fechado, limitado, $J = [c,d]$, com $c < d$, tal que $x_0 \notin J$ e $J \subset I$. Isto pode ser verificado facilmente. Usaremos este fato repetidamente para mostrar que, dado qualquer subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, podemos encontrar um número real $x \notin X$. Com efeito, sejam I_1 um intervalo limitado fechado e não-degenerado, tal que $x_1 \notin I_1$, I_2 um intervalo do mesmo tipo com $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$ e assim indutivamente: supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ limitados fechados e não-degenerados, com $x_i \notin I_i$ $(1 \leq i \leq n)$, podemos obter $I_{n+1} \subset I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Isto nos fornece uma seqüência decrescente $I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos limitados e fechados. Pelo Teorema 5, existe um número real x que pertence a todos os I_n. Como $x_n \notin I_n$, segue-se que x não é nenhum dos x_n, e portanto nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais.

Corolário 1. *Todo intervalo não-degenerado de números reais é não-enumerável.*

Com efeito, como $f\colon (0,1) \to (a,b)$, definida por $f(x) = (b-a)x + a$, é uma bijeção do intervalo aberto $(0,1)$ no intervalo aberto arbitrário (a,b), se provarmos que $(0,1)$ não é enumerável, resultará que nenhum intervalo não-degenerado pode ser enumerável. Ora, se $(0,1)$ fosse enumerável, $(0,1]$ também seria e, conseqüentemente, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o intervalo $(n, n+1]$ seria enumerável (pois $x \mapsto x+n$ é uma bijeção de $(0,1]$ sobre $(n,n+1]$). Mas $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]$ seria enumerável, por ser uma reunião enumerável dos conjuntos $(n, n+1]$.

Corolário 2. *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

Com efeito, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também o fosse, $\mathbb{R}$ seria enumerável, como reunião de dois conjuntos enumeráveis.

Exercícios

1. Dados a, b, c, d num corpo K, sendo b e d diferentes de zero, prove:

   1º) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$;

   2º) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

2. Dado $a \neq 0$ num corpo K, põe-se, por definição, $a^0 = 1$ e, se $n \in \mathbb{N}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ou seja, $a^{-n} = (a^n)^{-1}$. Prove:

   1º) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

   2º) $(a^m)^n = a^{mn}$ sejam quais forem $m, n \in \mathbb{Z}$.

3. Se $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{y_n}$ num corpo K, prove que, dados $a_1, \ldots, a_n \in K$ tais que $a_1y_1 + \cdots + a_ny_n \neq 0$, tem-se $\dfrac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{a_1y_1 + \cdots + a_ny_n} = \dfrac{x_1}{y_1}$.

4. Sejam K, L corpos. Uma função $f\colon K \to L$ chama-se um *homomorfismo* quando se tem $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, quaisquer que sejam $x, y \in K$.

   i) Dado um homomorfismo $f\colon K \to L$, prove que $f(0) = 0$.

   ii) Prove também que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, ou então $f(1) = 1$ e f é injetivo.

5. Seja $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ um homomorfismo. Prove que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ ou então $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

6. Verifique as associatividades da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}_2$. (*Nota.* Há dois modos de se proceder. Um requer a verificação de 16 igualdades. Outro consiste em observar que, definindo-se $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ por $f(n) = 0$ se n é par, e $f(n) = 1$ se n é ímpar, f é sobrejetiva e, para $m, n \in \mathbb{Z}$ quaisquer, valem $f(m+n) = f(m) + f(n)$, $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$. As associatividades em $\mathbb{Z}$ implicam nas de $\mathbb{Z}_2$.)

7. Seja p um número natural primo. Para cada inteiro m, indiquemos com $\overline{m}$ o resto da divisão de m por p. No conjunto $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ definamos duas operações: uma adição $\oplus$ e uma multiplicação $\odot$, pondo $m \oplus n = \overline{m+n}$ e $m \odot n = \overline{m \cdot n}$. Prove que a função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, definida por $f(n) = \overline{n}$, cumpre $f(m+n) = f(m) \oplus f(n)$ e $f(m \cdot n) = f(m) \odot f(n)$. Conclua que $\oplus$ e $\odot$ são comutativas, associativas, vale a distributividade, existem 0 e 1. Observe que dados $m, n \in \mathbb{Z}_p$, $m \odot n = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$. Conclua que $\mathbb{Z}_p$ é um corpo.

8. Seja K um conjunto onde são válidos todos os axiomas de corpo, salvo a existência de inverso multiplicativo.

   i) Dado $a \neq 0$ em K, prove que a função $f\colon K \to K$, definida por $f(x) = ax$, é uma bijeção se, e somente se, a possui inverso.

ii) Mostre que f é injetiva se, e somente se, vale a lei do corte para a.

iii) Conclua que, se K é finito, a lei do corte é equivalente à existência de inverso para cada elemento não-nulo de K.

9. Explique por que as operações usuais não tornam corpos o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros nem o conjunto $\mathbb{Q}[t]$ dos polinômios de coeficientes racionais.

10. Num corpo ordenado K, prove que $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

11. Seja P o conjunto dos elementos positivos de um corpo ordenado K.

    i) Dado um número natural n, prove que a função $f\colon P \to P$, definida por $f(x) = x^n$, é monótona crescente (isto é, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

    ii) Dê um exemplo em que f não é sobrejetiva.

    iii) Prove que $f(P)$ não é um subconjunto limitado superiormente de K.

12. Sejam X um conjunto qualquer e K um corpo. Indiquemos com $\mathcal{F}(X;K)$ o conjunto de todas as funções $f\colon X \to K$. Definamos em $\mathcal{F}(X;K)$ as operações de adição e de multiplicação de modo natural: dadas $f, g\colon X \to K$, as funções $f+g\colon X \to K$ e $f \cdot g\colon X \to K$ são dadas por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Verifique quais dos axiomas de corpo são válidos e quais não são válidos no conjunto $\mathcal{F}(X;K)$, relativamente a estas operações.

13. Sejam x, y elementos positivos de um corpo ordenado K. Tem-se $x < y \Leftrightarrow x^{-1} > y^{-1}$. Prove também que $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$.

14. Seja a um elemento positivo de um corpo ordenado K. Definamos $f: \mathbb{Z} \rightarrow K$ pondo $f(n) = a^n$. (Veja o Exercício 2.) Prove que f é crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$ e constante se $a = 1$.

15. Dados $x \neq 0$ num corpo ordenado K e $n \in \mathbb{N}$ qualquer, prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2n \cdot x$.

16. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x < 1$ num corpo ordenado K, prove que $(1 - x)^n \geq 1 - nx$.

17. Num corpo ordenado, se a e $a + x$ são positivos, prove que $(a + x)^n \geq a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot x$. Enuncie e demonstre desigualdades análogas às dos Exercícios 15 e 16, com a em vez de 1.

18. Sejam a, b, c, d elementos de um corpo ordenado K, onde b e d são positivos. Prove que $\dfrac{a+c}{b+d}$ está compreendido entre o menor e o maior dos elementos $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}\cdot$ Generalize: mostre que $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$ está compreendido entre o menor e o maior dos elementos $\dfrac{a_1}{b_1}, \cdots, \dfrac{a_n}{b_n}$, desde que $b_1, \ldots, b_n$ sejam todos positivos.

19. Dados x, y num corpo ordenado K, com $y \neq 0$, prove que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$, ou seja $|\dfrac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}\cdot$

20. Prove por indução que, dados $x_1, \ldots, x_n$ num corpo ordenado K, tem-se $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ e $|x_1 \cdot x_2 \cdots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_n|$.

21. Seja K um corpo ordenado. Exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de intervalos:

    a) o conjunto dos $x \in K$ tais que $|x - 3| + |x + 3| < 8$;

    b) idem $|x^2 - 2| \leq 1$;

c) $|2x+1| \leq 1$;

d) $|x-5| < |x+1|$;

e) $(2x+3)^6(x-2) \geq 0$.

22. Prove que, para todo x num corpo ordenado K, tem-se

$$|x-1| + |x-2| \geq 1.$$
$$|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2.$$

23. Dados a, b, ε num corpo ordenado K, prove que

$$|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

Conclua que $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a < |b| + \varepsilon$.

24. Prove que, num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K é arquimediano;

(ii) $\mathbb{Z}$ é ilimitado superior e inferiormente;

(iii) $\mathbb{Q}$ é ilimitado superior e inferiormente.

25. Prove que um corpo ordenado K é arquimediano se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$.

26. Seja $a > 1$ num corpo arquimediano K. Considere a função $f\colon \mathbb{Z} \to K$, definida por $f(n) = a^n$. Prove as seguintes afirmações:

(i) $f(\mathbb{Z})$ não é limitado superiormente;

(ii) $\inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

27. Sejam a racional diferente de zero, e x irracional. Prove que ax e $a+x$ são irracionais. Dê exemplo de dois números irracionais x, y tais que $x+y$ e $x \cdot y$ são racionais.

28. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

29. Prove que o conjunto K dos números reais da forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais, é um corpo relativamente às operações de adição e multiplicação de números reais. Examine se o mesmo ocorre com os números da forma $a+b\sqrt[3]{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

30. Sejam a, b números racionais positivos. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais. (*Sugestão*: multiplique por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.)

31. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \leq \sup X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ real dado pode-se achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncie e demonstre um resultado análogo com inf em vez de sup.

32. Seja $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Prove que $\inf X = 0$.

33. Sejam $A \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

34. Sejam A, B conjuntos não-vazios de números reais, tais que $x \in A$, $y \in B \Rightarrow x \leq y$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

35. Dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado inferiormente, seja $-A = \{-x; x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf A$.

36. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$. Prove que $c \cdot A$ é limitado e que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

37. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$. Prove:

    i) $A + B$ é limitado;

    ii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

    iii) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

    iv) Enuncie e demonstre resultados análogos supondo apenas A e B limitados superiormente (ou A e B limitados inferiormente).

38. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$. (Às vezes se escreve $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ ou $\sup\limits_{X} f$)

    i) Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada $f + g\colon X \to \mathbb{R}$.

    ii) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$, na notação do Exercício 37.

    iii) Conclua que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

    iv) Considerando as funções $f, g\colon [-1, +1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

39. Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A \text{ e } y \in B\}$. Prove que se A e B forem limitados então $A \cdot B$ é limitado, sendo $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ e $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

40. i) Prove que o produto de duas funções limitadas $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada $f \cdot g\colon X \to \mathbb{R}$.

    ii) Mostre que $(f \cdot g)(X) \subset f(X) \cdot g(X)$.

    iii) Conclua que, se f e g forem ambas positivas, tem-se $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$.

iv) Dê exemplo em que valham as desigualdades estritas.

v) Mostre porém que para toda f positiva tem-se $\sup(f^2) = [\sup f]^2$.

41. Analise os Exercícios 39 e 40 sem as hipóteses de positividade neles feitas.

42. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes inteiros.

i) Se um número racional $\frac{p}{q}$ (com p e q primos entre si) é tal que $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, prove que p divide a_0 e q divide a_n.

ii) Conclua que, quando $a_n = 1$, as raízes reais de f são inteiras ou irracionais. Em particular, examinando $x^n - a = 0$, conclua que, se um número inteiro $a > 0$ não possui n-ésima raiz inteira, então $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

iii) Use o resultado geral para provar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

43. Dado um número natural $p > 1$, prove que os números racionais da forma $\frac{m}{p^n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ constituem um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

44. Um número real r chama-se *algébrico* quando existe um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, não identicamente nulo, com coeficientes inteiros, tal que $f(r) = 0$.

i) Prove que o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros é enumerável.

ii) Dada uma enumeração $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ desses polinômios não identicamente nulos, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n o conjunto das raízes reais de f_n. Cada A_n é um conjunto finito (podendo ser vazio). O conjunto A dos números algébricos reais escreve-se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Conclua que A é enumerável. Mostre que A é denso em $\mathbb{R}$.

45. Seja X o complementar de um conjunto enumerável de números reais. Mostre que, para cada intervalo aberto (a, b), a interseção $(a, b) \cap X$ é não-enumerável. Em particular, X é denso.

46. Um número real chama-se *transcendente* quando não é algébrico. Prove que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável e denso em $\mathbb{R}$.

47. Prove que o conjunto dos números algébricos é um corpo. (Este exercício requer conhecimentos de Álgebra muito acima do que estamos admitindo até aqui.)

48. Dê exemplo de uma seqüência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) cuja interseção seja vazia e de uma seqüência decrescente de intervalos (abertos) limitados cuja interseção seja vazia.

49. Sejam $B \subset A$ conjuntos não-vazios de números reais. Suponha que A seja limitado superiormente e que, para cada $x \in A$, exista um $y \in B$ tal que $x \leq y$. Prove que, nestas condições, tem-se $\sup B = \sup A$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para inf.

50. Um *corte de Dedekind* é um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$.

    a) Prove que, num corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf B$.

    b) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

51. Sejam X, Y conjuntos não-vazios e $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada $x_0 \in X$ e cada $y_0 \in Y$, ponhamos $s_1(x_0) = \sup\{f(x_0, y); y \in Y\}$ e $s_2(y_0) = \sup\{f(x, y_0);$

$x \in X\}$. Isto define funções $s_1 : X \to \mathbb{R}$ e $s_2 : Y \to \mathbb{R}$. Prove que se tem $\sup_{x \in X} s_1(x) = \sup_{y \in Y} s_2(y)$. Em outras palavras

$$\sup_x [\sup_y f(x,y)] = \sup_y [\sup_x f(x,y)].$$

52. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior com inf em vez de sup. Considere, em seguida, o caso "misto" e prove que

$$\sup_y [\inf_x f(x,y)] \leq \inf_x [\sup_y f(x,y)].$$

Dê um exemplo onde se tem $<$ na desigualdade acima.

53. Sejam x, y números reais positivos. Prove que se tem

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

54. A desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, vista no exercício anterior, vale para n números reais positivos $x_1, \ldots, x_n$. Sejam $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ e $A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Tem-se $G \leq A$. Isto é evidente quando $x_1 = \cdots = x_n$. Para provar a desigualdade no caso geral, considere a operação que consiste em substituir o menor dos números dados, digamos x_i e o maior deles, digamos x_j respectivamente por $x_i' = \frac{x_i \cdot x_j}{G}$ e $x_j' = G$. Isto não altera a média geométrica e, quanto à aritmética, ela não aumenta, pois, como é fácil de se ver, $x_i' + x_j' \leq x_i + x_j$. Prove que, repetida esta operação no máximo n vezes, obtemos n números todos iguais a G e, portanto, sua média aritmética é G. Como em cada operação a média aritmética não aumentou, conclua que $G \leq A$, ou seja $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

55. Seja K um corpo ordenado completo. Indique com $0'$ e $1'$ o zero e a unidade de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $n' = n \cdot 1' + \cdots + 1'$ (n vezes) e $(-n)' = -n'$. Definamos uma função $f: \mathbb{R} \to K$ pondo $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p'}{q'}$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e, para x irracional, seja $f(x) = \sup\left\{\frac{p'}{q'} \in K; \frac{p}{q} < x\right\}$. Prove que f é um homomorfismo sobrejetivo e conclua que f é uma bijeção, ou seja um isomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre K.

56. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um isomorfismo de $\mathbb{R}$ em si mesmo. Prove que $f =$ identidade. Conclua que se K e L são corpos ordenados completos, existe um único isomorfismo de K sobre L.

57. Verifique que $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$.

58. Um conjunto G de números reais chama-se um *grupo aditivo* quando $0 \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$. Então, $x \in G \Rightarrow -x \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$. Seja então $G \subset \mathbb{R}$ um grupo aditivo de números reais. Indiquemos com G^+ o conjunto dos números reais pertencentes a G. Excetuando o caso trivial $G = \{0\}$, G^+ é não-vazio. Suponhamos pois $G \neq \{0\}$. Prove que:

i) Se $\inf G^+ = 0$, então G é denso em $\mathbb{R}$;

ii) Se $\inf G^+ = a > 0$, então $a \in G^+$ e $G = \{0, \pm a, \pm 2a, \ldots\}$.

[*Sugestão*: para provar (ii) note primeiro que se fosse $a \notin G^+$ existiriam $g, h \in G^+$ com $a < h < g < a + \frac{a}{2}$, donde $\frac{a}{2} > g - h \in G^+$, uma contradição. Em seguida, observe que todo $g \in G$ se escreve sob a forma $g = a \cdot q + r$, com $q \in \mathbb{Z}$, sendo $0 \leq r < a$. Veja que $r = g - a \cdot q \in G$, pois q é inteiro.]

iii) Conclua que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional, os números reais da forma $m+n\alpha$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, constituem um subconjunto *denso* em $\mathbb{R}$.

59. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x,y)=3x-y$, $g(x,y)=(x-1)^2+(y+1)^2-9$, $\varphi(x,y,z) = 3z$, $\psi(x,y,z) = x^2+y^2-z$. Interpretando (x,y) como as coordenadas cartesianas de um ponto do plano $\mathbb{R}^2$ e (x,y,z) como coordenadas de um ponto do espaço $\mathbb{R}^3$, descreva geometricamente os conjuntos $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$, $\varphi^{-1}(0)$ e $\psi^{-1}(0)$.

60. Seja a um número real positivo. Dado um número racional p/q (onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$), defina a potência de base a e expoente racional p/q como $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Prove:

    1º) Para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;

    2º) Para todo $r \in \mathbb{Q}^+$, a função $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, dada por $f(x) = x^r$, é uma bijeção crescente;

    3º) A função $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $g(r) = a^r$, (onde a é um número real positivo fixado) é crescente se $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$.

Capítulo IV

Seqüências e Séries de Números Reais

Estudaremos, neste capítulo, os limites de seqüência dos números reais e, em particular, trataremos das séries (ou "somas infinitas").

Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer indiretamente, a limites. Daí o papel central que esta noção desempenha.

Os limites de seqüências de números reais são os mais simples; por isso começaremos por eles. Outros tipos mais sofisticados de limites, como derivadas, integrais, seqüências de funções, etc., serão estudados nos capítulos posteriores.

Do ponto de vista intuitivo, sugerimos ao leitor pensar numa seqüência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reais como uma seqüência de pontos da reta e no seu limite, que definiremos a seguir, como um ponto do qual os pontos x_n tornam-se e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice n suficientemente grande. Um resultado crucial para justificar essa imagem geométrica é fornecido pelo Teorema 1, do Capítulo III, que recordamos agora.

Dados os números reais a, x, ε, com $\varepsilon > 0$, as três afirmações

seguintes são equivalentes:

$$|x - a| < \varepsilon,$$

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

x pertence ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Assim, o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, que chamaremos o *intervalo aberto de centro* a *e raio* ε, é formado pelos pontos cuja distância ao ponto a (centro do intervalo) é menor do que ε.

Analogamente, os pontos x do intervalo fechado $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ são caracterizados pela propriedade de estarem situados a uma distância menor do que ou igual a ε do centro a (ou seja, $|x - a| \leq \varepsilon$).

Outro resultado simples, porém indispensável para o estudo dos limites de seqüências, é o Teorema 3 do Capítulo II, segundo o qual um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado.

Quando $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto infinito, costuma-se dizer que X contém números naturais "arbitrariamente grandes". Isto quer dizer que, dado qualquer $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $n \in X$ tal que $n > n_1$. Em particular, se existir um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que X contém todos os números naturais $n > n_0$, então X é infinito (embora nem todos os subconjuntos infinitos $X \subset \mathbb{N}$ gozem desta propriedade). Neste caso, costuma-se dizer que "X contém todos os números naturais suficientemente grandes". Uma afirmação equivalente: $\mathbb{N} - X$ é finito.

1 Seqüências

De acordo com a definição geral (Capítulo I, §5), uma *seqüência de números reais* é uma função $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem* n, ou n-*ésimo termo* da seqüência.

Escreveremos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a seqüência x.

Não se deve confundir a seqüência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos. Para este conjunto, usaremos a notação $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. A função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva: pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Em particular (apesar da notação) o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ pode ser finito, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento, como é o caso de uma seqüência constante, em que $x_n = a \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando a seqüência (x_n) for injetiva, isto é, quando $m \neq n$ implicar $x_m \neq x_n$, diremos que ela é uma seqüência de termos *dois a dois distintos.*

Diz-se que a seqüência (x_n) é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da seqüência pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo da forma $[-c, c]$, com $c > 0$ (intervalo simétrico). Para ver isto, basta tomar $c = \max\{|a|, |b|\}$. Como a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, vemos que uma seqüência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí resulta que (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.

Quando uma seqüência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada.*

Uma seqüência (x_n) diz-se *limitada superiormente* quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$. Analogamente, diz-se que (x_n) é *limitada inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, uma seqüência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Dada uma seqüência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, uma *subseqüência* de x é a restrição da função x a um subconjunto

infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots)$ ou $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a subseqüência $x' = x|\mathbb{N}'$.

Observação: Estritamente falando, uma subseqüência x' não é uma seqüência pois seu domínio $\mathbb{N}'$ não é necessariamente igual a $\mathbb{N}$. Mas é trivial considerar x' como função definida em $\mathbb{N}$, a saber, a função $1 \mapsto x_{n_1}, 2 \mapsto x_{n_2}, \ldots, i \mapsto x_{n_i}, \ldots$ Isto é o que se faz ao usar a notação $x' = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Lembremos que um subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}'$ existe $n_i \in \mathbb{N}'$ com $n_i > n_0$.

Toda subseqüência de uma seqüência limitada é limitada (respectivamente limitada superiormente ou inferiormente).

Uma seqüência (x_n) chama-se *crescente* quando $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, isto é, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, a seqüência diz-se *não-decrescente.*

Analogamente, quando $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$, ou seja, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a seqüência (x_n) diz-se *decrescente.* Ela é chamada *não-crescente* quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

As seqüências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas seqüências *monótonas.*

Uma seqüência não-decrescente é sempre limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, por exemplo. Do mesmo modo, uma seqüência não-crescente é sempre limitada superiormente.

Para que uma seqüência monótona seja limitada é (necessário e) suficiente que ela possua uma subseqüência limitada. Com efeito, seja, por exemplo, $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \cdots \leq x_{n_k} \leq \cdots \leq b$ uma subseqüência limitada da seqüência não-decrescente (x_n). Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $n_k > n$ e, portanto, $x_n \leq x_{n_k} \leq b$. Logo $x_n \leq b$ para todo n. A seqüência (x_n) é, conseqüentemente, limitada.

Exemplo 1. $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; isto define a seqüência constante $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$; ela é evidentemente limitada, pois $x(\mathbb{N}) = \{1\}$, não-decrescente e também não-crescente.

Exemplo 2. $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a aplicação de inclusão. Obtém-se a seqüência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.

Exemplo 3. $x_n = 0$ para n par e $x_n = 1$ para n ímpar. A seqüência assim definida é $(1, 0, 1, 0, \ldots)$. Seu conjunto de valores é $x(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$. Ela é limitada e não é monótona. A mesma seqüência poderia também ser definida pela fórmula $x_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^{n+1}]$ ou então por $x_n = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Exemplo 4. $x_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos a seqüência $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$, monótona decrescente, limitada.

Exemplo 5. Seja $x_n = [1 + (-1)^{n+1}]n/2$. Então $x_n = n$ para n ímpar e $x_n = 0$ para n par. A seqüência (x_n) tem a forma $(1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots)$. Ela é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, não monótona. Seus termos de ordem ímpar constituem uma subseqüência monótona crescente ilimitada, $x_{2n-1} = 2n - 1$, enquanto os termos de ordem par constituem uma subseqüência constante, $x_{2n} = 0$.

Exemplo 6. Seja $a \in \mathbb{R}$. Consideremos a seqüência $(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$ das potências de a, com expoente n inteiro positivo. Se $a = 0$ ou $a = 1$, tem-se evidentemente uma seqüência constante. Se $0 < a < 1$, a seqüência é decrescente, limitada. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n obtemos $a^{n+1} < a^n$, logo a seqüência é decrescente. Como todos os seus termos são positivos, temos $0 < a^n < 1$ para todo n. Consideremos agora o caso $-1 < a < 0$. Então a seqüência (a^n) não é mais monótona (seus termos são alternadamente positivos e negativos) mas ainda é limitada pois $|a^n| = |a|^n$, com $0 < |a| < 1$. O caso $a = -1$ é trivial: a seqüência (a^n) é $(-1, +1, -1, +1, \ldots)$. Quando $a > 1$

obtém-se uma seqüência crescente: basta multiplicar ambos os membros desta desigualdade pelo número positivo a^n para obter $a^{n+1} > a^n$. Mas agora temos $a = 1 + h$ com $h > 0$. Logo, pela desigualdade de Bernoulli, $a^n > 1 + nh$. Assim, dado qualquer número real b, podemos achar n tal que $a^n > b$: basta tomar $n > \dfrac{b-1}{h}$, pois isto fornecerá sucessivamente $nh > b - 1$, $1 + nh > b$, $a^n > b$. Assim, quando $a > 1$, (a_n) é uma seqüência crescente ilimitada. Finalmente, quando $a < -1$, a seqüência (a^n) não é monótona (pois seus termos são alternadamente positivos e negativos) e é ilimitada superior e inferiormente. Com efeito, seus termos de ordem par, $a^{2n} = (a^2)^n$, constituem uma subseqüência crescente, ilimitada superiormente, de números positivos, a saber, a seqüência das potências do número $a^2 > 1$. Enquanto isso, seus termos de ordem ímpar constituem uma subseqüência decrescente, ilimitada inferiormente, a saber, seqüência $a^{2n+1} = a(a^{2n})$.

Exemplo 7. Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a < 1$, seja $x_n = 1+a+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A seqüência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ é crescente, pois $x_{n+1} = x_n + a^{n+1}$. Além disso, ela é limitada pois $0 < x_n < \dfrac{1}{1-a}$ para todo n. Em particular, tomando $a = 1/2$, obtemos $1+1/2+\cdots+1/2^n = 2-\dfrac{1}{2^n} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 8. Uma seqüência importante em Análise é a que tem como n-ésimo termo $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\cdot$ Ela é evidentemente crescente. Além disso, é limitada, pois

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 9. Estreitamente relacionada com o exemplo acima é a seqüência cujo n-ésimo termo é $b_n = (1 + 1/n)^n$. A fórmula

do binômio de Newton nos dá

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n},$$

ou seja

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Vemos ainda que cada b_n é uma soma de parcelas positivas. Cada uma dessas parcelas cresce com n. Além disso, o número de parcelas também cresce com n. Logo a seqüência (b_n) é crescente. Observamos ainda, pela última igualdade, que $b_n < a_n$ para todo n. Logo (b_n) é uma seqüência limitada, com $b_n < 3$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Exemplo 10. Tomemos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, ponhamos $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. A seqüência que se obtém é $(0, 1, 1/2, 3/4, 5/8, 11/16, 21/32, \ldots)$. Seus termos são definidos por indução: cada um deles, a partir do terceiro, é a média aritmética entre os dois termos anteriores. Ora, dados os números a, b, digamos com $a < b$, sua média aritmética $\frac{a+b}{2}$ é o ponto médio do segmento de reta $[a, b]$. Logo obtém-se $\frac{a+b}{2}$ somando-se ao número a a metade da distância de a a b, ou seja $\frac{1}{2}(b-a)$, ou então subtraindo-se de b a mesma quantidade. Segue-se que os termos desta seqüência são $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $x_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, $x_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, etc. Separando os termos de ordem

par dos de ordem ímpar, obtemos

$$x_1 = 0,$$
$$x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$x_5 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8},$$

$$x_7 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32},$$

....

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right), \end{aligned}$$

enquanto um cálculo análogo nos dará

$$x_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Assim, vemos que a seqüência (x_n) é limitada, com $0 \leq x_n \leq 1$. Seus termos de ordem par constituem uma subseqüência decrescente e os de ordem ímpar uma subseqüência crescente.

Exemplo 11. Seja $x_n = \sqrt[n]{n}$. Trata-se de uma seqüência de números positivos, portanto limitada inferiormente. Vejamos se é monótona: para que seja $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ é necessário e suficiente que $n^{n+1} > (n+1)^n$, isto é, que $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Isto de fato ocorre para todo $n \geq 3$, pois sabemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, seja qual for n. Assim concluímos que a seqüência dada por $\sqrt[n]{n}$ é decrescente a partir do seu terceiro termo. Note-se que $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, logo ela cresce em seus três primeiros passos, só então começando a decrescer. Assim $(\sqrt[n]{n})$ é limitada.

2 Limite de uma seqüência

Intuitivamente, dizer que o número real a é limite da seqüência (x_n) significa afirmar que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Com um pouco mais de precisão: estipulando-se um "erro" por meio de um número real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos x_n da seqüência que têm índice n maior do que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε. O índice n_0, evidentemente, deve depender de ε, sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de ε, necessite-se tomar n_0 cada vez maior.

Isto nos leva à seguinte definição.

Diz-se que o número real a é *limite* da seqüência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = \lim x_n$, ou $a = \lim_n x_n$, ou $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Em linguagem simbólica (conveniente no quadro-negro):

$$\boxed{\lim x_n = a \,.\!\equiv\!.\, \forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

O símbolo: $.\equiv.$ significa que o que vem depois é definição do que vem antes;

$\forall$ significa "para todo", ou "qualquer que seja";

$\exists$ significa "existe";

; significa "tal que";

$\Rightarrow$ significa "implica".

Assim, a mensagem acima estenografada tem a seguinte tradução:

"$\lim x_n = a$ quer dizer (por definição) que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$".

O matemático inglês G. H. Hardy, um aficionado das competições esportivas, costumava dizer que, para bem entender a idéia de limite, deve-se pensar em dois competidores. Um deles, digamos, o mocinho, quer provar que $\lim x_n = a$, enquanto o outro, digamos, o bandido, procura impedi-lo. O bandido fornece os épsilons (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique $|x_n - a| < \varepsilon$).

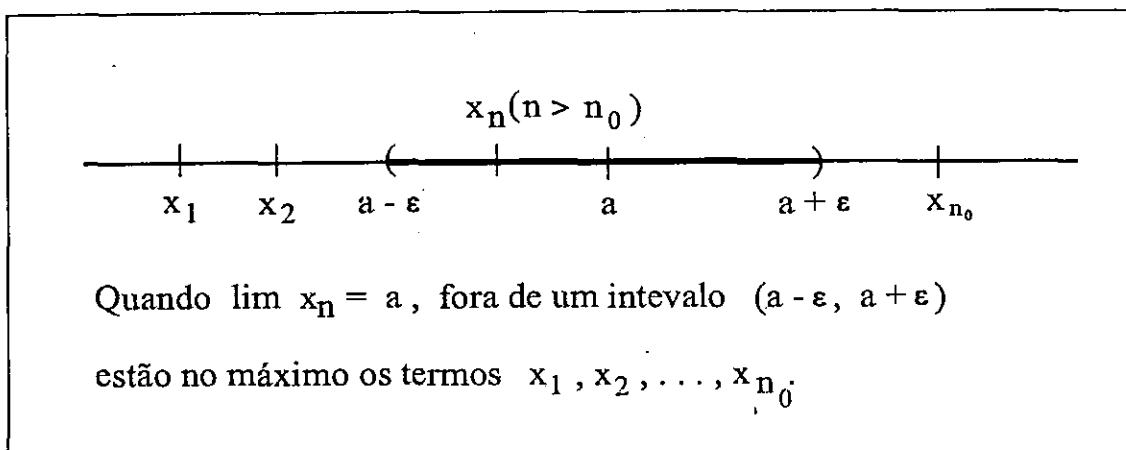
O mocinho ganhará o jogo (e ficará portanto estabelecido que $\lim x_n = a$) se, para *qualquer* $\varepsilon > 0$ exibido pelo seu adversário, ele for capaz de obter um n_0 conveniente (isto é, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga achar *um* número real $\varepsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (Ou seja, esse ε deve ser tal que para todo n_0 exista $n > n_0$ com $|x_n - a| \geq \varepsilon$.)

Voltando a falar sério, observamos que se $\lim x_n = a$ então qualquer intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a e raio $\varepsilon > 0$, contém todos os termos x_n da seqüência, com exceção no máximo de um número finito de índices n. Com efeito, dado o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, como $\lim x_n = a$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Assim, fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Reciprocamente: se qualquer intervalo de centro a contém todos os x_n, salvo talvez para um número finito de índices n, então $\lim x_n = a$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ conterá todos os x_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_0 o maior índice n tal que $x_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Então $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja $|x_n - a| < \varepsilon$. Isto prova que $\lim x_n = a$.

Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a seqüência (x_n) *converge* para a, ou *tende* para a e escreve-se $x_n \to a$. Uma seqüência que possui limite chama-se *convergente*. Do contrário, ela se chama *divergente*. Explicitamente, uma seqüência (x_n) diz-se divergente quando, para nenhum número real a, é verdade que

se tenha $\lim x_n = a$.

Quando $\lim x_n = a$, fora de um intevalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ estão no máximo os termos $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$.

Demonstraremos, agora, alguns resultados simples sobre limites, a fim de podermos analisar inteligentemente os exemplos que virão logo a seguir.

Em primeiro lugar, mostraremos que uma seqüência não pode possuir dois limites distintos.

Teorema 1. (Unicidade do limite). *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$ *então* $a = b$.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim x_n = b$. Para isso, tomemos $\varepsilon = \frac{|b - a|}{2}\cdot$ Vemos que $\varepsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ são disjuntos. (Se existisse $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ teríamos $|a - x| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, donde $|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < 2\varepsilon = |a - b|$, um absurdo.) Ora, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não é $\lim x_n = b$.

Teorema 2. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subseqüência de* (x_n) *converge para o limite* a.

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$ uma subseqüência de (x_n). Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n>n_0 \Rightarrow |x_n - a|<\varepsilon$. Como os índices da subseqüência formam um subconjunto infinito,

existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então $n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \varepsilon$. Logo $\lim x_{n_i} = a$.

Corolário. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *então, para todo* $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

Com efeito, $(x_{1+k}, x_{2+k}, \ldots, x_{n+k}, \ldots)$ *é uma subseqüência de* (x_n).

Exprime-se o corolário acima dizendo que o limite de uma seqüência não se altera quando dela se omite um número finito de termos. Na realidade, o Teorema 2 diz que o limite se mantém, mesmo que se desprezem termos em número infinito (desde que se conserve uma infinidade de índices, de modo a restar ainda uma subseqüência). É útil (e óbvio) o fato de que se $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge.

Observação: Há duas aplicações especialmente úteis dos Teoremas 1 e 2 (conjuntamente). Uma delas é para mostrar que uma certa seqüência (x_n) não converge: basta obter duas subseqüências de (x_n) com limites distintos. A outra é para determinar o limite de uma seqüência (x_n) que, *a priori*, se sabe que converge: basta determinar o limite de alguma subseqüência. Ele será o limite procurado. Veremos situações como estas nos Exemplos 13 e 14.

Teorema 3. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$. Então, tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Sejam c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da seqüência estão contidos no intervalo $[c, d]$; logo a seqüência é limitada.

Observações: 1. A recíproca é falsa: a seqüência $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ é limitada mas não é convergente porque possui duas subseqüências que convergem para limites diferentes, a saber, $(0, 0, 0, \ldots)$ e $(1, 1, 1, \ldots)$.

2. Basta então verificar que uma seqüência não é limitada para concluir que ela não converge.

A proposição seguinte nos fornece um "critério de convergência", isto é, nos permite concluir que uma seqüência (x_n) converge, mesmo sem conhecermos, *a priori*, o seu limite.

Além de sua importância, tanto teórica como prática, o teorema abaixo teve um papel histórico relevante. Foi tentando prová-lo "de maneira puramente aritmética" que Dedekind (1858) verificou a impossibilidade de fazê-lo sem antes possuir uma teoria matemática satisfatória dos números reais. Isto o motivou a construir os números reais através dos "cortes" que hoje têm o seu nome. (Veja [Dedekind].)

Teorema 4. *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Para fixar as idéias, seja $(x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots)$ uma seqüência não-decrescente limitada. Tomemos $a = \sup \{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_n$. Como a seqüência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos de fato $\lim x_n = a$, como queríamos demonstrar.

Observação: Se (x_n) fosse não-crescente, teríamos $\lim x_n = \inf \{x_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$.

Corolário. *Se uma seqüência monótona* (x_n) *possui uma subseqüência convergente, então* (x_n) *é convergente.*

Com efeito, neste caso a seqüência monótona (x_n) é limitada porque possui uma subseqüência limitada.

Exemplos. Antes de apresentar exemplos novos, reexaminaremos os dez anteriores, do ponto de vista de convergência.

1. Toda seqüência constante $(a, a, \ldots, a, \ldots)$ é evidentemente convergente e tem limite a. Em particular, $\lim 1 = 1$.

2. A seqüência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ não converge porque não é limitada.

3. A seqüência $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ é divergente, pois admite duas subseqüências (constantes) que convergem para limites diferentes.

4. Temos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$ Então $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

5. A seqüência $(1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots)$ não é convergente porque é ilimitada. Note-se que ela possui uma subseqüência convergente.

6. Quando $a = 0$ ou $a = 1$, a seqüência (a^n) é constante, logo converge trivialmente. Quando $a = -1$, a seqüência (a^n) diverge pois é igual a $(-1, +1, -1, +1, \ldots)$. Quando $a > 1$, a mesma seqüência é monótona crescente e ilimitada, logo é divergente. Quando $a < -1$, a seqüência é divergente por ser ilimitada. Seja agora $0 < a < 1$. Então a seqüência $(a, a^2, a^3, \ldots)$ é monótona (decrescente) limitada; logo, converge. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ (quando $0 < a < 1$). Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $\frac{1}{a} > 1$, as potências de $\frac{1}{a}$ formam uma seqüência crescente ilimitada. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, isto é, $a^n < \varepsilon$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$, o que mostra ser $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Finalmente, se $-1 < a < 0$, afirmamos que ainda se tem $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Com efeito, temos $0 < |a| < 1$. Logo $0 = \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = \lim\limits_{n\to\infty} |a^n|$. Segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, em virtude da seguinte observação:

$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0$. (A veracidade da observação é trivial. Basta usar a definição de limite.)

7. Se $0 < a < 1$, a seqüência cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ é crescente e limitada, logo converge. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-a}$. Com efeito, temos $x_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, logo $|x_n - \frac{1}{1-a}| = \frac{a^{n+1}}{1-a}$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos, em virtude do exemplo anterior, obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^{n+1} < \varepsilon(1-a)$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow \frac{a^{n+1}}{1-a} < \varepsilon$, ou seja $|x_n - \frac{1}{1-a}| < \varepsilon$. Logo $\lim x_n = \frac{1}{1-a}$, como queríamos demonstrar. Se vale apenas $0 < |a| < 1$, a seqüência (x_n) pode não ser monótona mas ainda se tem $\lim x_n = \frac{1}{1-a}$, pelo argumento acima.

8. e 9. As seqüências (a_n) e (b_n), sendo monótonas limitadas, são convergentes. Seja $e = \lim a_n$. Mostraremos logo mais (Exemplo 16) que se tem também $e = \lim b_n$. (O número e, base dos logaritmos naturais, é uma das constantes mais ubíquas na Análise Matemática.)

10. Neste exemplo, os termos de ordem ímpar constituem uma seqüência crescente limitada.

$$x_{2n-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right] = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

Vemos que $|x_{2n+1} - \frac{2}{3}| = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Como $0 < \frac{1}{4} < 1$, segue-se do Exemplo 6 que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, podemos obter n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$. Com

maior razão, $n > n_0 \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow |x_{2n-1} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$. Assim $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \frac{2}{3}\cdot$

Analogamente, os termos de índice par formam uma subseqüência decrescente limitada.

$$x_{2n} = 1 - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] =$$
$$= 2 - \left[1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = 2 - \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

Como $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, vemos que $|x_{2n} - \frac{2}{3}| = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Segue-se daí que $\lim x_{2n} = \frac{2}{3}\cdot$ Verificamos assim que os termos de ordem par e os termos de ordem ímpar da seqüência (x_n) formam duas subseqüências que têm o mesmo limite $\frac{2}{3}\cdot$ Deve resultar disto que $\lim x_n = \frac{2}{3}\cdot$ De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1$, n par $\Rightarrow |x_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ e $n > n_2$, n ímpar $\Rightarrow |x_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$. Seja n_0 o maior dos dois números n_1, n_2, isto é, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo, quer n seja par quer seja ímpar, tem-se $|x_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

11. Como, a partir do seu terceiro termo, a seqüência $(\sqrt[n]{n})$ é decrescente, segue-se que existe $a = \lim \sqrt[n]{n}$. Mostraremos logo mais (Exemplo 14) que $a = 1$.

3 Propriedades aritméticas dos limites

Veremos agora como se comportam os limites de seqüências relativamente às operações (soma, multiplicação, divisão, etc.) e às desigualdades.

Teorema 5. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma seqüência limitada, então* $\lim x_n \cdot y_n = 0$ *(mesmo que não exista* $\lim y_n$*).*

Demonstração. Existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim x_n = 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}\cdot$ Logo, $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$. Isto mostra que $x_n \cdot y_n \to 0$.

Exemplo 12. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n} = 0$. Com efeito $\frac{\text{sen}(nx)}{n} = \text{sen}(nx) \cdot \frac{1}{n}$, com $|\text{sen}(nx)| \leq 1$ e $\frac{1}{n} \to 0$.

Antes de demonstrar o teorema abaixo, observemos o seguinte: quando $\lim y_n = b$, com $b \neq 0$, então, salvo um número finito de índices n, tem-se $y_n \neq 0$. Com efeito, sendo $b \neq 0$, podemos tomar um intervalo $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ de centro b tal que $0 \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. (Basta tomar $\varepsilon = |b|$.) Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, isto é, $n > n_0 \Rightarrow y_n \neq 0$.

No item 3 do teorema abaixo, para formar a seqüência $\frac{x_n}{y_n}$, limitamo-nos aos índices n suficientemente grandes de modo que $y_n \neq 0$.

Teorema 6. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$, *então*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$;

2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3. $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

Demonstração. 1. Dado $\varepsilon > 0$ existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_0$ implica:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto prova que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. O caso da diferença $x_n - y_n$ se trata do mesmo modo.

2. Temos $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Ora, (x_n) é uma seqüência limitada (Teorema 3) e $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, pelo Teorema 5, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. Por motivo semelhante, $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Assim, pela parte 1, já demonstrada, temos $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0$, donde $\lim x_n y_n = ab$.

3. Em primeiro lugar, notemos que, como $y_n b \to b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \frac{b^2}{2}\cdot$ (Basta tomar $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ e achar o n_0 correspondente.) Segue-se que, para todo $n > n_0$, $\frac{1}{y_n b}$ é um número (positivo) inferior a $\frac{2}{b^2}\cdot$ Logo, a seqüência $\left(\frac{1}{y_n b}\right)$ é limitada. Ora, temos

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}\cdot$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, segue-se do Teorema 5 que

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0, \text{ e portanto } \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\cdot$$

Observação: É claro que resultados análogos aos itens 1 e 2, do Teorema 6, valem ainda para três, quatro ou um número

finito qualquer de seqüências. Por exemplo, se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $\lim z_n = c$ então $\lim(x_n + y_n + z_n) = a + b + c$ e $\lim(x_n \cdot y_n \cdot z_n) = abc$. Mas deve-se tomar o cuidado de não tentar aplicar o teorema para certas somas (ou produtos) em que o número de parcelas (ou fatores) é variável e cresce acima de qualquer limite. Por exemplo, seja $s_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ (n parcelas). Então $s_n = 1$ donde $\lim s_n = 1$. Por outro lado, cada parcela $\frac{1}{n}$ tem limite zero. Uma aplicação descuidada do Teorema 6 levaria ao absurdo de concluir que
$\lim s_n = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \cdots + \lim \frac{1}{n} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$

Exemplo 13. Examinemos a seqüência de números reais positivos $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, onde $a > 0$. Ela é decrescente se $a > 1$ e crescente se $0 < a < 1$, sendo limitada em qualquer hipótese. Existe portanto $l = \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}$. Podemos garantir que $l > 0$. (Com efeito, se $0 < a < 1$, então $l = \sup\{a^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} \geq a$. Se for $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$, para todo n, logo $l = \inf a^{1/n} \geq 1$.) Afirmamos que se tem $\lim a^{1/n} = 1$. Para provar isto, consideramos a subseqüência $(a^{1/n(n+1)}) = (a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \ldots)$. O Teorema 2 e o item 2 do Teorema 6 nos dão

$$l = \lim a^{1/n(n+1)} = \lim a^{1/n - 1/(n+1)} = \lim \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}}$$
$$= \frac{\lim a^{1/n}}{\lim a^{1/(n+1)}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Exemplo 14. Mostremos agora que $\lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n} = 1$. Sabemos que este limite existe porque a seqüência é monótona decrescente a partir do seu terceiro termo. Escrevendo $l = \lim n^{1/n}$, vemos que $l = \inf\{n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}$. Como $n^{1/n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $l \geq 1$. Em particular, $l > 0$. Considerando a subseqüência $(2n)^{1/2n}$, temos

$$l^2 = \lim[(2n)^{1/2n}]^2 = \lim[(2n)^{1/n}] = \lim[2^{1/n} \cdot n^{1/n}]$$
$$= \lim 2^{1/n} \cdot \lim n^{1/n} = l.$$

Como $l \neq 0$, de $l^2 = l$ concluímos $l = 1$.

Exemplo 15. Em relação ao limite de $\frac{x_n}{y_n}$, vejamos o que pode acontecer quando $\lim y_n = 0$. Façamos, então, esta hipótese. Se, ainda assim, existir $\lim \frac{x_n}{y_n}$, (ou pelo menos a seqüência $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ for limitada) deve-se ter necessariamente $\lim x_n = 0$, pois $x_n = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) y_n$. Em outras palavras, quando $\lim y_n = 0$ e a seqüência (x_n) diverge ou tem limite $\neq 0$, o quociente $\frac{x_n}{y_n}$ não converge (nem sequer mantém-se limitado). Suponhamos agora que $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Neste caso, o quociente $\frac{x_n}{y_n}$ pode ter limite ou não. Por exemplo, se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{an}$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$. Mas se $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$, então $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$, logo não existe $\lim \frac{x_n}{y_n}$.

Teorema 7. (Permanência do sinal). *Se* $\lim x_n = a > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$. *(Se uma seqüência tem limite positivo, a partir de uma certa ordem todos os seus termos são positivos.)*

Demonstração. Seja $\varepsilon = a/2 > 0$. Então $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (a/2, 3a/2)$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a/2, 3a/2)$, ou seja $x_n > a/2$. Assim $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$.

Observação: Da mesma maneira prova-se que se $\lim x_n = b < 0$ então, a partir de uma certa ordem, todos os termos x_n são negativos.

Corolário 1. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *seqüências convergentes. Se* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Com efeito, se fosse $\lim x_n > \lim y_n$, então teríamos $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ e, daí, teríamos $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande.

Observação: Mesmo supondo $x_n < y_n$, para todo n, não se pode garantir que $\lim x_n < \lim y_n$. Por exemplo, $0 < 1/n$, mas $\lim 1/n = 0$.

Corolário 2. *Seja* (x_n) *convergente. Se* $x_n \geq a$ *para todo* n, *então* $\lim x_n \geq a$.

Teorema 8. *Sejam* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim x_n = \lim y_n = a$ *então* $\lim z_n = a$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_2 \Rightarrow y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, vemos que $n > n_0$ implica $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$, donde $\lim z_n = a$.

Exemplo 16. Voltando aos Exemplos 8 e 9, mostraremos agora que se tem $\lim a_n = \lim b_n = e$. Em primeiro lugar, como $b_n < a_n$ para todo n, obtemos logo $\lim b_n \leq \lim a_n$. Por outro lado, fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$, temos, para todo $n > p$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \\ + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ (e mantendo p fixo) na desigualdade acima, o segundo membro tende para o limite a_p. O Corolário 1 do Teorema 7, então, nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq a_p$ para todo p. Novamente a mesma proposição nos permite concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq \lim\limits_{p\to\infty} a_p$. Enfim, obtemos

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

4 Subseqüências

A definição de limite pode ser reformulada assim: o número real a é o limite da seqüência $x = (x_n)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$x^{-1}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$

tem complementar finito em $\mathbb{N}$. Sabemos que isto equivale a dizer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Mostraremos agora que $a \in \mathbb{R}$ é limite de uma subseqüência de (x_n) se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$x^{-1}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$

é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. É claro que se um subconjunto de $\mathbb{N}$ possui complementar finito ele é um subconunto infinito, mas a recíproca é falsa.

Teorema 9. *A fim de que* $a \in \mathbb{R}$ *seja limite de uma subseqüência de* (x_n) *é necessário e suficiente que, para todo* $\varepsilon > 0$*, exista uma infinidade de índices* n *tais que* $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, a condição é necessária. Com efeito, seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$ tal que $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i > i_0 \Rightarrow x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Como existe uma infinidade de índices $i > i_0$, segue-se que existem infinitos $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Reciprocamente, suponhamos que, para cada $\varepsilon>0$, o conjunto $\{n\in\mathbb{N}; x_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ seja infinito. Tomando sucessivamente $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$ vamos obter um conjunto $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\}$ tal que $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. Com efeito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Supondo, por indução, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ foram definidos de modo que $x_{n_2} \in (a-1/2, a+1/2)$, $x_{n_3} \in (a-1/3, a+1/3), \dots, x_{n_i} \in (a-1/i, a+1/i)$, observamos que o conjunto $\left\{n \in \mathbb{N}; x_n \in \left(a - \frac{1}{i+1}, a + \frac{1}{i+1}\right)\right\}$ é infinito, logo contém

algum inteiro n_{i+1} maior do que $n_1, n_2, \ldots, n_i$. Isto completa a definição indutiva de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \ldots\}$. Como $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = a$, ou seja, $\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = a$. Vemos que a é limite de uma subseqüência de (x_n). A condição é, pois suficiente.

Um número real a chama-se *valor de aderência* de uma seqüência (x_n) quando a é limite de alguma subseqüência de (x_n).

Lembrando que um subconjunto de $\mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, o Teorema 9 nos diz que $a \in \mathbb{R}$ é valor de aderência de (x_n) se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Isto se exprime em linguagem comum dizendo-se que a é valor de aderência de (x_n) se, e somente se, todo intervalo aberto de centro a contém *termos* x_n *com índices arbitrariamente grandes*. Por outro lado, $a = \lim x_n$ significa que qualquer intervalo aberto de centro a contém *todos os termos* x_n *com índices suficientemente grandes*.

Exemplo 17. Se $\lim x_n = a$ então a é valor de aderência de (x_n) e, pelo Teorema 2, a é o único valor de aderência de (x_n). A seqüência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ tem 0 como seu único valor de aderência, embora não seja convergente. A seqüência $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ tem como valores de aderência 0 e 1. Qualquer que seja o número real a, existem infinitos números racionais no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Segue-se então do Teorema 9 que, dada uma enumeração arbitrária $(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$ dos números racionais, todo número real é valor de aderência da seqüência (r_n). Seja $x_n = n$. A seqüência (x_n) não possui valores de aderência.

Seja agora (x_n) uma seqüência *limitada* de números reais. Mostraremos que o conjunto dos valores de aderência de (x_n) não é vazio, que entre eles existe um que é o menor de todos e outro que é o maior, e que a seqüência converge se, e somente se, possui apenas um valor de aderência. Num sentido natural, o maior e o menor valor de aderência são generalizações do limite para o caso de seqüências limitadas que podem não ser convergentes.

Passemos à discussão formal.

Seja (x_n) uma seqüência limitada; digamos, com $\alpha \le x_n \le \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Temos $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \dots$ Logo, pondo $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, vem

$$\alpha \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le \beta.$$

Existem, portanto, os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n\,,$$
$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n\,.$$

Escreveremos $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$, diremos que a é o *limite inferior* e que b é o *limite superior* da seqüência (x_n). Tem-se evidentemente

$$\liminf x_n \le \limsup x_n\,.$$

Exemplo 18. Sejam $x_{2n-1} = -\frac{1}{n}$ e $x_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$. Verifica-se sem dificuldade que $\inf X_{2n-2} = \inf X_{2n-1} = -\frac{1}{n}$ e $\sup X_{2n-1} = \sup X_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$. Logo $\liminf x_n = 0$ e $\limsup x_n = 1$. Estes são, aliás, os dois únicos valores de aderência da seqüência (x_n).

Teorema 10. *Seja* (x_n) *uma seqüência limitada. Então* $\liminf x_n$ *é o menor valor de aderência e* $\limsup x_n$ *é o maior valor de aderência de* (x_n).

Demonstração. Provemos inicialmente que $a = \limsup x_n$ é valor de aderência de (x_n). Para isto, usaremos o Teorema 9. Dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, mostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como $a = \lim a_n$, existe $n_1 > n_0$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_1} < a + \varepsilon$. Como $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$, segue-se da última desigualdade que $a + \varepsilon$ (sendo maior do que

a_{n_1}) não é cota inferior de X_{n_1}. Logo existe $n \geq n_1$ tal que $a_{n_1} \leq x_n < a + \varepsilon$. Isto nos dá $n > n_0$ com $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, como queríamos. Mostremos, agora, que nenhum número $c < a$ pode ser valor de aderência de (x_n). Ora, como $a = \lim a_n$, segue-se de $c < a$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < a_{n_0} \leq a$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, concluímos que $n \geq n_0 \Rightarrow c < a_{n_0} \leq x_n$. Pondo $\varepsilon = a_{n_0} - c$, vemos que $c + \varepsilon = a_{n_0}$, logo o intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ não contém termo x_n algum com $n \geq n_0$. Isto exclui a possibilidade de c ser valor de aderência de (x_n). A demonstração para lim sup se faz de modo semelhante.

Corolário 1. *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Com efeito, sendo $a = \limsup x_n$ um valor de aderência, alguma subseqüência de (x_n) converge para a.

Corolário 2. *Uma seqüência limitada de números reais* (x_n) *é convergente se, e somente se,* $\liminf x_n = \limsup x_n$, *isto é, se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Com efeito, se a seqüência (x_n) é convergente então $\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n$. Reciprocamente, suponhamos $\liminf x_n = \limsup x_n = a$. Na notação acima, temos $a = \lim a_n = \lim b_n$. Dado portanto $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} < a + \varepsilon$. Ora, $n > n_0$ implica $a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, portanto $\lim x_n = a$.

Dada uma seqüência limitada (x_n), sejam $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$. Existem subseqüências de (x_n) convergindo para a e para b, mas não para um valor menor do que a nem maior do que b. Se $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$, a subseqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ pode possuir uma infinidade de termos menores do que a. Mas, dado um número qualquer menor do que a, digamos, $a - \varepsilon$, (com $\varepsilon > 0$) não pode existir uma infinidade de índices n tais que $x_n < a - \varepsilon$, pois, neste caso, esses índices originariam uma subseqüência de (x_n), a qual possuiria um valor de aderência $c \leq a - \varepsilon$, o que seria absurdo. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n$. Analogamente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow x_n < b + \varepsilon$. Em outras palavras, dado qualquer intervalo aberto $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ contendo o intervalo $[a, b]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$) tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$. Evidentemente, esta propriedade somente não basta para caracterizar os números $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$: se todos os termos x_n da seqüência estiverem contidos num intervalo $[\alpha, \beta]$ então $\alpha - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Mas $[a, b]$ é o *menor* intervalo que cumpre a condição acima, conforme nos ensina o

Teorema 11. *Sejam* $a = \liminf x_n$ *e* $b = \limsup x_n$, *onde* (x_n) *é uma seqüência limitada. Dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$. *Além disso,* a *é o maior e* b *é o menor número com esta propriedade.*

Demonstração. A primeira afirmação já foi provada acima. Suponhamos agora que a' seja um número maior do que a. Tomando $\varepsilon = (a' - a)/2$ temos $a + \varepsilon = a' - \varepsilon$. Como a é valor de aderência de (x_n), existe uma infinidade de índices n tais que $a - \varepsilon < a + \varepsilon$, e, portanto, $x_n < a' - \varepsilon$. Logo nenhum número $a' > a$ goza da propriedade acima estipulada. Do mesmo modo se mostra que se $b' < b$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que infinitos valores de n cumprem a condição $b' + \varepsilon < x_n$. Isto conclui a demonstração.

Corolário 1. *Se* $c < \liminf x_n$ *então existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$. *Analogamente, se* $\limsup x_n < d$ *então existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < d$ *para todo* $n > n_2$.

Com efeito, sendo $a = \liminf x_n$, $c < a$ significa $c = a - \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Do mesmo modo se argumenta com lim sup.

Corolário 2. *Dada uma seqüência limitada* (x_n), *sejam* a *e* b *números reais com as seguintes propriedades: se* $c < a$ *então existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$; *se* $b < d$ *então existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_2 \Rightarrow x_n < d$. *Nestas condições,*

$a \leq \liminf x_n$ e $\limsup x_n \leq b$.

Os Corolários 1 e 2 apenas repetem, com outras palavras, as afirmações contidas no Teorema 11.

Apêndice ao §4

O Corolário 1 do Teorema 10, por sua importância, merece uma demonstração direta. Uma alternativa razoável é provar que toda seqüência possui uma subseqüência monótona (veja o roteiro no Exercício 15 deste capítulo) e em seguida usar o Teorema 4. Outra possibilidade é a que apresentamos agora.

Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência, digamos com $x_n \in [a, b]$ para todo n. Consideremos o conjunto $A = \{t \in \mathbb{R};\ t \leq x_n$ para uma infinidade de índices $n\}$. Como $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $a \in A$ e que nenhum elemento de A pode ser maior do que b. Assim, A é não-vazio e limitado superiormente. Existe, portanto, $c = \sup A$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $t \in A$ com $c - \varepsilon < t$, logo há uma infinidade de índices n tais que $c - \varepsilon < x_n$. Por outro lado, como $c + \varepsilon \notin A$, existe apenas um número finito de índices n com $c + \varepsilon \leq x_n$. Concluímos então que, para uma infinidade de valores de n, temos $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$. Segue-se do Teorema 9 que c é limite de uma subseqüência de (x_n).

O leitor notará que, na demonstração acima, tem-se $c = \limsup x_n$.

5 Seqüências de Cauchy

Já salientamos a importância do Teorema 4 ("toda seqüência monótona limitada é convergente"), que nos permite saber, em certos casos, que uma seqüência possui limite, mesmo sem conhecermos o valor desse limite. Mas é claro que muitas seqüências

convergentes não são monótonas, de modo que aquele critério de convergência não é o mais geral possível. Veremos agora o critério de Cauchy, que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de uma seqüência de números reais.

Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Ela se chama uma *seqüência de Cauchy* quando cumpre a seguinte condição:
— dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

A fim de que (x_n) seja uma seqüência de Cauchy, exige-se que seus termos x_m, x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n, se aproximem arbitrariamente uns dos outros. Compare-se com a definição de limite, onde se exige que os termos x_n se aproximem arbitrariamente de um número real a dado *a priori*. Aqui se impõe uma condição apenas sobre os termos da própria seqüência.

Teorema 12. *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > m_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que mostra ser (x_n) uma seqüência de Cauchy.

Intuitivamente: se $\lim x_n = a$ então, para valores grandes de n, os termos x_n se aproximam de a. Neste caso, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

Passaremos agora à demonstração da recíproca do Teorema 12, que é o resultado principal desta seção. As duas proposições seguintes são enunciadas como lemas porque estão contidas no Teorema 13.

Lema 1. *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$.

Em particular, $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0+1}\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (x_n) é limitada.

Lema 2. *Se uma seqüência de Cauchy (x_n) possui uma subseqüência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também (veja o Teorema 9) $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \varepsilon/2$. Portanto, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Isto mostra que $\lim x_n = a$.

Teorema 13. *Toda seqüência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Pelo Lema 1, ela é limitada. Logo (Corolário 1 do Teorema 10) possui uma subseqüência convergente. Segue do Lema 2 que (x_n) converge.

Exemplo 19. (*Método das aproximações sucessivas*). Seja $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que a seqüência (x_n) seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy, e, portanto, converge. Com efeito, temos $|x_3 - x_2| \leq \lambda |x_2 - x_1|$, $|x_4 - x_3| \leq \lambda^2 |x_2 - x_1|$, e, em geral, $|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n-1} |x_2 - x_1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, vale

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \cdots + \lambda^{n-1}) |x_2 - x_1| \\
&= \lambda^{n-1} (\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \cdots + \lambda + 1) |x_2 - x_1| \\
&= \lambda^{n-1} \cdot \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} \cdot |x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} \cdot |x_2 - x_1| .
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot |x_2 - x_1| = 0$, segue-se que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon$. Daí resulta que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. (Pois podemos sempre supor $m \geq n$ e escrever $m = n + p$.)

Aplicação. (Aproximações sucessivas da raiz quadrada). Seja $a > 0$. Definiremos uma seqüência (x_n) tomando $x_1 = c > 0$ arbitrariamente e pondo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Se conseguirmos provar que existe $b = \lim x_n$ e $b \neq 0$, deve ser necessariamente $b = \sqrt{a}$. De fato, fazendo $n \to \infty$ na igualdade que define x_{n+1} em função de x_n, obtemos $b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$, ou seja $b = \frac{a}{b}$ e portanto $b^2 = a$. Antes vejamos um resultado que nos será útil.

Lema. *Para todo* $x > 0$, *tem-se* $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

Demonstração. Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por 2 e elevando-a ao quadrado, vemos que ela é equivalente a $x^2 + 2a + x^2/a^2 > 2a$, o que é óbvio.

Segue-se do lema que, para todo $n > 1$, temos $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Portanto, $x_n \cdot x_{n+1} > \frac{a}{2}$, ou seja, $\frac{a}{2 \cdot x_n \cdot x_{n+1}} < 1$ para todo $n > 1$. Usaremos este fato para mostrar que a seqüência (x_n) cumpre a condição $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n > 1$. Decorrerá então, do Exemplo 19, que existe $b = \lim x_n$ e, como $x_n \geq \sqrt{\frac{a}{2}}$ para todo $n > 1$, teremos $b \neq 0$. Ora, é claro que

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} - x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2} \cdot \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n \cdot x_{n+1}} .
\end{aligned}
$$

Logo

$$\left|\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2},$$

pois $0 < \dfrac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}} < 1$. A fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

fornece, portanto, aproximações sucessivas para $\sqrt{a}$.

6 Limites infinitos

Entre as seqüências divergentes, destacaremos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Diremos que "x_n tende para mais infinito", e escreveremos $\lim x_n = +\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$. (Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leq A$.)

Exemplo 20. Se $x_n = n$ então obviamente $\lim x_n = +\infty$. Seja $x_n = a^n$, com $a > 1$. Então $a = 1 + h$, $h > 0$. Dado $A > 0$, vemos que $a^n = (1+h)^n > 1 + nh > A$ desde que se tome $n > (A-1)/h$. Assim, se escolhermos um inteiro $n_0 > (A-1)/h$, teremos $n > n_0 \Rightarrow a^n > A$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$. Mais geralmente, dada uma seqüência não-decrescente (x_n), ou ela é convergente (se for limitada) ou então, se for ilimitada, deve-se ter $\lim x_n = +\infty$. Com efeito, sendo (x_n) ilimitada, dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > A$. Como (x_n) é não-decrescente, $n > n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0} > A$.

Evidentemente, se $\lim x_n = +\infty$ então (x_n) é ilimitada superiormente mas é limitada inferiormente. Além disso, se

$\lim x_n = +\infty$ então toda subseqüência de (x_n) também tende para $+\infty$. Assim, por exemplo, para cada $p \in \mathbb{N}$ temos $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$ pois $(1, 2^p, 3^p, \dots)$ é uma subseqüência de $(1, 2, 3, \dots)$. Também para cada $p \in \mathbb{N}$ temos $\lim_{n\to\infty} n^{1/p} = +\infty$ porque a seqüência $(1, 2^{1/p}, 3^{1/p}, \dots)$ é crescente e possui a subseqüência ilimitada $(1, 2, 3, \dots)$.

De modo análogo, diz-se que $\lim x_n = -\infty$ quando dado arbitrariamente $A > 0$ pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$.

Como se vê facilmente, tem-se $\lim x_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim(-x_n) = +\infty$. Portanto, se $\lim x_n = -\infty$ então (x_n) é ilimitada inferiormente mas limitada superiormente. Assim, por exemplo, $x_n = (-1)^n \cdot n$ não tem limite $+\infty$ nem $-\infty$ pois é ilimitada nos dois sentidos. Por outro lado, a seqüência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente mas não tem limite igual a $+\infty$ porque possui uma subseqüência constante.

Deve-se observar com toda ênfase que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. As seqüências (x_n) para as quais $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$ não são convergentes. Estas notações servem apenas para dar informação sobre o comportamento das seqüências para valores grandes de n.

Teorema 14. (Operações aritméticas com limites infinitos.)

1. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então,* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$;

2. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então,* $\lim x_n \cdot y_n = +\infty$.

3. *Seja* $x_n > 0$ *para todo* n. *Então* $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$;

4. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *seqüências de números positivos. Então:*

a) *se existe* $c > 0$ *tal que* $x_n > c$ *para todo* n *e se* $\lim y_n = 0$ *tem-se* $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$;

b) *se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$ *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração. 1. Seja dado $A > 0$. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A$, donde $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

2. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A/c$. Logo $n > n_0 \Rightarrow x_n \cdot y_n > (A/c)c = A$ e, portanto, $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

3. Suponhamos $\lim x_n = 0$. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < x_n < 1/A$ e, portanto, $1/x_n > A$. Logo $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$. Reciprocamente, se $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$ e, portanto, $0 < x_n < \varepsilon$. Segue-se que $\lim x_n = 0$.

4. a) Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < y_n < \frac{c}{A}\cdot$ Então $n > n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > \frac{c}{c/A} = A$. Logo, $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

b) Existe $k > 0$ tal que $x_n < k$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > k/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{x_n}{y_n} < \frac{k}{k/\varepsilon} = \varepsilon$, e assim $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$.

Observação: Se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, nada se pode dizer a respeito de $\lim(x_n + y_n)$. Dependendo do caso, pode ocorrer que a soma $x_n + y_n$ convirja, tenha limite $+\infty$, limite $-\infty$ ou não tenha limite algum. (Diz-se então que "$\infty - \infty$ é indeterminado".) Assim, por exemplo, se $x_n = \sqrt{n+1}$ e

$y_n = -\sqrt{n}$ então $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = -\infty$, enquanto

$$\begin{aligned}\lim(x_n + y_n) &= \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $x_n = n^2$ e $y_n = -n$, temos $\lim(x_n + y_n) = \lim(n^2 - n) = \lim n(n-1) = +\infty$. Já $\lim(n - n^2) = -\infty$. Finalmente, se $x_n = n$ e $y_n = (-1)^n - n$, temos $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = -\infty$ enquanto $\lim(x_n + y_n) = \lim(-1)^n$ não existe.

Também $\frac{\infty}{\infty}$ é indeterminado. Isto quer dizer que se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = +\infty$, nada se pode dizer a respeito de $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Dependendo do caso, o quociente $\frac{x_n}{y_n}$ pode convergir, pode-se ter $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, ou pode não existir o limite. Por exemplo, se $x_n = n+1$ e $y_n = n-1$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1+1/n}{1-1/n} = 1$. Já se $x_n = n^2$ e $y_n = n$, temos $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim n = +\infty$. Finalmente, sejam $x_n = [2 + (-1)^n]n$ e $y_n = n$. Temos $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, mas $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim[2 + (-1)^n]$ não existe.

Exemplo 21. Seja $a > 1$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$. Com efeito, temos $a = 1 + h$, com $h > 0$. Logo $a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ (para $n \geq 2$). Daí, $\frac{a^n}{n} \geq \frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2} \cdot h^2$ para $n \geq 2$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2} \cdot h^2\right) = +\infty$, segue-se que $\lim \frac{a^n}{n} = +\infty$. Analogamente, para qualquer $n \geq 3$ temos

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} h^3.$$

Daí, $\frac{a^n}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} + \frac{h}{n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)h^2 + \frac{n}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)h^3$.

Concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty$. De maneira análoga se mostra que, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$ quando $a > 1$. Isto exprime que, para $a > 1$, as potências a^n crescem com n mais rapidamente do que qualquer potência (de expoente fixo) de n.

Exemplo 22. Para todo número real $a>0$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$. (Isto significa que o fatorial de n cresce mais depressa do que a^n, seja qual for $a > 0$ fixo.) Com efeito, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n_0}{a} > 2$. Escrevamos $k = \frac{n_0!}{a^{n_0}}\cdot$ Para todo $n > n_0$, teremos $\frac{n!}{a^n} = k \cdot \frac{n_0+1}{a} \cdot \frac{n_0+2}{a} \cdots \frac{n}{a} > k \cdot (2)^{n-n_0}$. Segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$, ou seja, que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

7 Séries numéricas

Neste parágrafo, estenderemos a operação de adição (até agora definida para um número finito de números reais) de modo a atribuir significado a uma igualdade do tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$, na qual o primeiro membro é uma "soma" com uma infinidade de parcelas. É claro que não tem sentido somar uma seqüência infinita de números reais. O que o primeiro membro da igualdade acima exprime é o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)\cdot$ A afirmação contida naquela igualdade significa que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ difere de 1 por menos de ε.

Definiremos, portanto, somas infinitas através de limites. Assim sendo, é de se esperar que algumas somas possam ser efetu-

adas (isto é, convirjam) e outras não, já que nem toda seqüência possui limite. Em vez de "soma infinita" usaremos a palavra *série*. O problema principal da teoria das séries é determinar quais são convergentes e quais não são. A questão (bem mais difícil e, na maioria das vezes, sem significado) de calcular o valor da soma é melhor abordada através da teoria das séries de funções, como séries de Taylor e séries de Fourier.

Seja (a_n) uma seqüência de números reais. A partir dela, formamos uma nova seqüência (s_n) cujos elementos são as somas

$$s_1 = a_1\,, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

que chamaremos as *reduzidas* da série Σa_n. A parcela a_n é chamada o n-*ésimo termo* ou o *termo geral* da série.

Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

diremos que a série Σa_n é *convergente* e o limite s será chamado a *soma* da série. Escreveremos então

$$s = \Sigma a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Se a seqüência das reduzidas não convergir, diremos que a série Σa_n é *divergente*.

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com a_0 em vez de a_1.

Observação: Toda seqüência (x_n) de números reais pode ser considerada como a seqüência das reduzidas de uma série. Basta tomar $a_1 = x_1$ e $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $a_1 + \cdots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$. A série $x_1 + \Sigma(x_{n+1} - x_n)$ assim obtida converge se, e somente se, a seqüência (x_n) é convergente. No caso afirmativo, a soma desta série é igual a $\lim x_n$. Assim falando, pode-se dar a impressão de que a teoria das séries coincide com a teoria dos limites de

seqüências. Isto não é verdade, pelo seguinte motivo. Ao estudar a série cujas reduzidas são s_n, estaremos deduzindo suas propriedades a partir das diferenças $a_n = s_n - s_{n-1}$. Em vez de tomar como ponto de partida o comportamento dos números s_n, concentraremos a atenção sobre os termos a_n.

A primeira condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral tenda para zero.

Teorema 15. *Se* Σa_n *é uma série convergente então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidentemente, tem-se também $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$.

Exemplos.

23. A recíproca do Teorema 15 é falsa. O contra-exemplo clássico é dado pela *série harmônica* $\sum \frac{1}{n}$. Seu termo geral, $\frac{1}{n}$, tende para zero mas a série diverge. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > \\ &\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} \cdot \end{aligned}$$

Segue-se que $\lim s_{2^n} = +\infty$ e, por conseguinte $\lim s_n = +\infty$.

Resulta daí que, para $0 < r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ diverge, pois $\frac{1}{n^r} > \frac{1}{n}$ para todo $n > 1$.

24. A *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é divergente quando $|a| \geq 1$ pois neste caso seu termo geral não tende para zero. Quando $|a| < 1$,

a série geométrica converge, sendo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, conforme o exemplo 7 acima.

25. Das propriedades aritméticas do limite de seqüências resulta que se Σa_n e Σb_n são séries convergentes, então a série $\Sigma(a_n + b_n)$ é convergente, com $\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$. Se Σa_n converge então, para todo r real, tem-se $\Sigma(ra_n)$ convergente, com $\Sigma(ra_n) = r\Sigma a_n$. Finalmente, se $\Sigma a_n = s$ e $\Sigma b_n = t$ convergem, pondo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ então $s \cdot t = \lim(s_n \cdot t_n) = \lim(a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_n b_n)$. Logo a série Σc_n, com $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_n b_j$, converge e vale a igualdade $\Sigma c_n = (\Sigma a_n) \cdot (\Sigma b_n)$. Veremos adiante que em certos casos (como por exemplo $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ para todo n) tem-se $(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = \Sigma p_n$ onde $p_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$.

26. A série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e sua soma pode ser calculada facilmente. Com efeito, sendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, a reduzida de ordem n desta série é $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim s_n = 1$. Exemplos assim não são freqüentes. A maneira mais eficaz de calcular somas de certas séries é desenvolver funções conhecidas em série de Taylor ou série de Fourier.

27. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ é divergente pois seu termo geral não tende a zero. Suas reduzidas de ordem ímpar

são iguais a 1 e as de ordem par são iguais a zero.

28. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é fixado arbitrariamente. Com efeito, se as reduzidas da primeira série são s_n, as da segunda são $t_{n+1} = s_{n+n_0} - s_{n_0-1}$. Isto se exprime dizendo que o caráter de convergência de uma série não se altera se dela omitimos (ou a ela acrescentamos) um número finito de termos.

Uma série Σa_n pode divergir por dois motivos. Ou porque as reduzidas $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ não são limitadas ou porque elas oscilam em torno de alguns valores de aderência. Quando os termos da série têm todos o mesmo sinal, esta última possibilidade não ocorre, pois, neste caso, as reduzidas formam uma seqüência monótona. Temos então o

Teorema 16. *Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série Σa_n converge se, e somente se, as reduzidas $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ formam uma seqüência limitada, isto é, se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $a_1 + \cdots + a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sendo $a_n \geq 0$, temos $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$; logo a seqüência (s_n) converge se, e somente se, é limitada.

Corolário. (Critério de comparação.) *Sejam Σa_n e Σb_n séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de Σb_n implica a convergência de Σa_n, enquanto que a divergência de Σa_n acarreta a de Σb_n.*

Exemplo 29. Se $r > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge. Como os termos desta série são positivos, a seqüência das suas reduzidas é crescente. Para provar que tal seqüência é limitada, basta obter uma subseqüência limitada. Tomaremos as reduzidas de ordem

$m = 2^n - 1$. Para cada uma delas vale

$$s_m = 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r},$$

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r}\right)^i.$$

Como $r > 1$, temos $\frac{2}{2^r} < 1$, logo a série geométrica $\sum \left(\frac{2}{2^r}\right)^n$ converge para uma soma c. Assim $s_m < c$ para todo $m = 2^n - 1$. Concluímos que a série $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente quando $r > 1$. Já vimos que ela é divergente se $r \leq 1$.

Teorema 17. (Critério de Cauchy para séries). *A fim de que a série Σa_n seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta observar que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{m+p} - s_n|$, onde (s_n) é a seqüência das reduzidas de Σa_n, e aplicar o critério de Cauchy para seqüências.

O Teorema 17 é de interesse principalmente teórico. Ele será utilizado a seguir para mostrar que se a série $\Sigma|a_n|$ converge então Σa_n também converge. Este fato merece destaque. Por isso daremos uma definição agora.

Uma série Σa_n chama-se *absolutamente convergente* quando $\Sigma|a_n|$ é uma série convergente.

Exemplo 30. Evidentemente, toda série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando $-1 < a < +1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente. $\left(\text{Por exemplo, } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{2}{3}\cdot\right)$ Mas nem toda série convergente é absolutamente convergente. O exemplo

típico de uma série convergente Σa_n tal que $\Sigma|a_n| = +\infty$ é dado por

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Suas reduzidas de ordem par são

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, \; s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right),$$
$$s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \text{ etc.}$$

Tem-se $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \ldots$, pois cada par de parênteses encerra um número positivo. Enquanto isso, as reduzidas de ordem ímpar são

$$s_1 = 1, \; s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \; s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \text{ etc.}$$

Portanto, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2n-1}$. Logo existem $s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ e $s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Como $s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$, segue-se que $s' = s''$ $(= s$, digamos). Assim, $\lim s_n = s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. A série dada é convergente, mas não é absolutamente convergente pois a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ é divergente. (A título de informação, comunicamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$. Isto se vê desenvolvendo a função $\log(1+x)$ em série de Taylor e tomando $x = 1$.)

Quando uma série Σa_n converge mas $\Sigma|a_n|$ é divergente, dizemos que Σa_n é *condicionalmente convergente.*

Teorema 18. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Se $\Sigma|a_n|$ converge, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$,

qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. Nestas condições $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ e, portanto, Σa_n converge, em virtude do Teorema 17.

Corolário 1. *Seja* Σb_n *uma série convergente, com* $b_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se existem* $k > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $|a_n| \leq k \cdot b_n$ *para todo* $n > n_0$, *então a série* Σa_n *é (absolutamente) convergente.*

Corolário 2. *Se, para todo* $n > n_0$, *tem-se* $|a_n| \leq k \cdot c^n$ *onde* $0 < c < 1$ *e* k *é uma constante positiva, então a série* Σa_n *é (absolutamente) convergente.*

Com efeito, sendo $0 < c < 1$, a série geométrica Σc^n converge.

Tomando $k = 1$, a condição $|a_n| \leq c^n$ é equivalente a $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$. Dizer que esta condição é satisfeita para todo n maior do que um certo n_0, significa afirmar que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. (Veja o corolário do Teorema 11.)

Corolário 3. (Teste da raiz.) *Se existe* c *tal que* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ *para todo* $n > n_0$ *então* Σa_n *é (absolutamente) convergente. Em outras palavras, se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *então a série* Σa_n *converge (absolutamente).*

Às vezes acontece que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Então vale o

Corolário 4. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *então a série* Σa_n *é (absolutamente) convergente.*

Observação: Se existe uma infinidade de índices n para os quais $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ então a série Σa_n é evidentemente divergente porque seu termo geral não tende para zero. Em particular, isto ocorre quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Muitas vezes este caso é incluído no enunciado do teste da raiz, mas preferimos não fazê-lo, pois, em geral, não é mais fácil calcular o limite de uma raiz do que verificar, mediante inspeção, quando o termo geral de uma série não tende para zero. Muito mais desagradável é o fato de que freqüentemente se tem $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (juntamente com $\lim a_n = 0$). Aí nada se pode dizer: a série talvez convirja, talvez

não. Por exemplo, consideremos $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$. Em ambos os casos $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. (O Exemplo 14 dá $\lim \sqrt[n]{1/n} = 1$ e daí $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1$.) No entanto, a primeira destas séries é divergente e a segunda é convergente.

Exemplo 31. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n$, onde a é um número real tomado arbitrariamente. Temos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n \cdot a^n|} = |a| \cdot \lim \sqrt[n]{n} = |a|$. Logo esta série converge (absolutamente) quando $|a| < 1$. O mesmo resultado valeria se tomássemos $\Sigma n^2 \cdot a^n$ ou, mais geralmente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r \cdot a^n$, onde r é qualquer constante. Evidentemente, se $|a| \geq 1$, a série diverge porque seu termo geral não tende para zero.

Exemplo 32. Seja agora a série $1+2a+a^2+2a^3+\cdots+2a^{2n-1}+a^{2n}+\ldots$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2|a|^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a|^{2n}} = |a|$, segue-se que esta série converge (absolutamente) se, e somente se, $|a| < 1$.

Teorema 19. (Teste da razão). *Sejam Σa_n uma série de termos todos não-nulos e Σb_n uma série convergente com $b_n > 0$ para todo n. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$ então Σa_n é (absolutamente) convergente.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $n > n_0$, multipliquemos membro a membro as desigualdades

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leq \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \ldots, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Obteremos $\frac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n_0+1}}$, ou seja, $|a_n| \leq k \cdot b_n$, onde $k = \frac{|a_{n_0+1}|}{b_{n_0+1}}$. Segue-se do Corolário 1 do Teorema 18 que Σa_n é (absolutamente) convergente.

Corolário 1. *Se existe uma constante* c *tal que* $0 < c < 1$ *e* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c$ *para todo* $n \geq n_0$*, então a série* Σa_n *é (absolutamente) convergente. Em outras palavras, se* $\limsup(|a_{n+1}|/|a_n|) < 1$*, a série* Σa_n *converge (absolutamente).*

Com efeito, a série geométrica Σc^n sendo convergente, basta tomar $b_n = c^n$ no teorema anterior.

Se acontecer de existir o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, então temos o

Corolário 2. *Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ *então a série* Σa_n *é (absolutamente) convergente.*

Exemplos.

32a. Retomemos as séries $\Sigma n \cdot a^n$ e $1 + 2a + a^2 + 2a^3 + a^4 + \ldots$ dos Exemplos 31 e 32. Para a primeira, temos $\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)a^{n+1}|}{|n \cdot a^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|a| = |a|$. Logo a série $\Sigma n \cdot a^n$ converge quando $|a| < 1$. Vemos que o limite do quociente $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ coincide com o limite da raiz n-ésima de $|a_n|$. Neste caso, o teste da razão e o teste da raiz levam ao mesmo resultado. Para a segunda destas séries, temos $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{2}$, se n for par, e $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$, se n for ímpar. Portanto, $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$ e o teste da razão só permite concluir a convergência da série para $|a| < \frac{1}{2}$, enquanto que o teste da raiz garantiria a mesma, mais geralmente, para $|a| < 1$. Isto indica que o teste da raiz é mais eficaz do que o da razão. Com efeito, veremos mais adiante que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ e que, se existe $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ então

existe também $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ e os dois limites são iguais. Entretanto deve-se observar que, em geral, é mais fácil calcular o limite da razão do que a raiz, pois, ao efetuar o quociente a_{n+1}/a_n, ocorrem quase sempre simplificações.

33. Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, onde x é um número real (fixado arbitrariamente). Temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \to 0$, logo a série converge absolutamente, seja qual for x.

Observação: Novamente aqui, quando $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, nada se pode concluir (a série pode divergir ou convergir). É o que ocorre com as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$. A primeira diverge, a segunda converge e em ambas $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Quando $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo $n > n_0$, então, evidentemente, a série diverge porque seu termo geral não tende para zero. Note-se porém que, ao contrário do teste da raiz, não se pode concluir a divergência da série Σa_n apenas pelo fato de se ter $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para uma infinidade de valores de n. Com efeito, dada qualquer série convergente de termos positivos Σa_n, a série $a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + \ldots$ ainda é convergente mas, se indicarmos com Σb_n esta nova série, teremos $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ para todo n ímpar.

Teorema 20. *Seja* (a_n) *uma seqüência limitada de números reais positivos. Tem-se*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Em particular, se existir $\lim a_{n+1}/a_n$ *existirá também* $\lim \sqrt[n]{a_n}$ *e os dois limites serão iguais.*

Demonstração. Basta provar que $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup (a_{n+1}/a_n)$, o que será feito por absurdo. Com efeito, se não

fosse assim, existiria um número c tal que $\limsup(a_{n+1}/a_n) < c < \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Da primeira destas desigualdades resultaria a existência de $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow a_{n+1}/a_n < c$. Assim, para todo $n > p$ teríamos:

$$a_{p+1}/a_p < c,\ a_{p+2}/a_{p+1} < c, \ldots, a_n/a_{n-1} < c.$$

Multiplicando membro a membro estas $n-p$ desigualdades, viria $a_n/a^p < c^{n-p}$, ou seja, $a_n < (a_p/c^p) \cdot c^n$. Pondo $k = a_p/c^p$, poderíamos afirmar:

$$n > p \Rightarrow a_n < k \cdot c^n.$$

Ora, sabemos (Exemplo 13) que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}=1$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} c\sqrt[n]{k}=c$. Segue-se então da última desigualdade que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup c\sqrt[n]{k} = c.$$

Esta contradição prova o teorema.

Exemplos.

34. Tomemos dois números reais positivos $a < b$ e formemos uma seqüência (x_n) começando com a e multiplicando cada termo, alternadamente, por b ou por a, para obter o termo seguinte. A seqüência obtida é a, ab, a^2b, a^2b^2, $a^3b^2, \ldots$. Temos $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = b$ se n é ímpar e $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$ se n é par. Segue-se que não existe $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}\cdot$ Por outro lado, existe $\lim \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$. Pode, então, ocorrer realmente que exista o limite da raiz sem que exista o limite da razão.

35. Seja $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot$ Temos $x_n = \sqrt[n]{y_n}$ onde $y_n = \dfrac{1}{n!}\cdot$ Logo $\lim x_n = \lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ desde que este último limite exista. Ora

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1}$ e, portanto, $\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = 0$. Segue-se que $\lim x_n = 0$.

36. Para ilustrar mais uma vez como o Teorema 20 pode ser utilizado no cálculo de certos limites envolvendo raízes n-ésimas, mostraremos agora que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. Ora, escrevendo $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, temos $x_n = \sqrt[n]{y_n}$ onde $y_n = \frac{n^n}{n!}$. Logo $\lim x_n = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n}$ se este último existir. Mas

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Voltando às séries, utilizaremos agora o Teorema 18 para demonstrar o critério de convergência de Dirichlet (o qual, entretanto, não garante convergência absoluta).

Teorema 21. (Dirichlet). *Seja* Σa_n *uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *formam uma seqüência limitada. Seja* (b_n) *uma seqüência não-crescente de números positivos com* $\lim b_n = 0$. *Então a série* $\Sigma a_n b_n$ *é convergente.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n = {} & a_1(b_1 - b_2) + \\ & + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \\ & + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots + \\ & + (a_1 + \cdots + a_n)b_n = s_1(b_1 - b_2) + \\ & + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + \\ & + s_nb_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_nb_n \,. \end{aligned}$$

Existe $k > 0$ tal que $|s_n| \leq k$ para todo n. Além disso, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ é uma série convergente de números reais não-negativos (soma: b_1). Logo, pelo Corolário 1 do Teorema 18, a série $\Sigma s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Como $\lim s_n b_n = 0$, segue-se que existe $\lim(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$, isto é, a série $\Sigma a_n b_n$ converge.

Corolário 1 (Abel). *Se Σa_n é convergente e (b_n) é uma seqüência não-crescente de números positivos (não necessariamente tendendo para zero) então a série $\Sigma a_n b_n$ é convergente.*

Neste corolário, enfraquecemos a hipótese sobre os b_n mas, em compensação, exigimos que a série Σa_n seja convergente. Para demonstrá-lo, escrevemos $\lim b_n = c$. Então $(b_n - c)$ é uma seqüência não-crescente com limite zero. Pelo Teorema 21, a série $\Sigma a_n(b_n - c)$ converge para uma soma s. Como Σa_n é convergente, segue-se que $\Sigma a_n b_n = s + c\Sigma a_n$ também converge.

Corolário 2 (Leibniz). *Se (b_n) é uma seqüência não-crescente com* $\lim b_n = 0$ *então a série $\Sigma(-1)^n b_n$ é convergente.*

Com efeito, embora a série $\Sigma(-1)^n$ não convirja, suas reduzidas formam uma seqüência limitada. Observe o caso particular $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$, já visto no Exemplo 30.

Exemplo 37. Se o número real x não é um múltiplo inteiro de 2π, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ convergem. Com efeito, sabendo que $\frac{1}{n}$ tende monotonamente para zero, basta verificar que as seqüências $s_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(nx)$ e $t_n = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen}(nx)$ são limitadas. Isto fica fácil de ver usando números complexos. Com efeito, $1 + s_n$ e t_n são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da soma $1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^n = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$. Ora, sendo $x \neq 2k\pi$,

$k \in zb$, temos $e^{ix} \neq 1$ e, portanto,

$$\left|\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}.$$

A seqüência de números complexos $1 + e^{ix} + \cdots + (e^{ix})^n$ é, portanto, limitada e daí resulta que as seqüências de suas partes reais e imaginárias também são limitadas.

Dada uma série Σa_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ ponhamos $p_n = a_n$ se $a_n > 0$ e $p_n = 0$ se $a_n \leq 0$. O número p_n será chamado a *parte positiva* de a_n. Analogamente, escrevamos $q_n = 0$ se $a_n \geq 0$ e $q_n = -a_n$ se $a_n < 0$ e chamemos q_n a *parte negativa* de a_n. Temos $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$, $|a_n| = a_n + 2q_n$, $p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$ para todo n.

Quando a série Σa_n é absolutamente convergente, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} p_n + \sum_{n=1}^{k} q_n$. Logo as séries Σp_n e Σq_n são ambas convergentes (pois suas reduzidas formam seqüências monótonas, limitadas pelo número $\Sigma|a_n|$). A recíproca é óbvia: se Σp_n e Σq_n ambas convergem então Σa_n é absolutamente convergente.

Se, porém, Σa_n é condicionalmente convergente, então tanto Σp_n como Σq_n são séries divergentes. Com efeito, se pelo menos uma dessas duas séries convergisse (por exemplo, $\Sigma q_n = c$) então, usando o fato de $|a_n| = a_n + 2q_n$, teríamos, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} a_n + 2\sum_{n=1}^{k} q_n.$$

Fazendo $k \to \infty$ na igualdade acima teríamos $\Sigma|a_n| = \Sigma a_n + 2c$ e, portanto, Σa_n convergiria absolutamente.

Exemplo 38. Na série $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, que é condicionalmente convergente, a série das partes positivas é $1+0+\frac{1}{3}+0+\frac{1}{5}+0+\ldots$ enquanto a série das partes negativas é $0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+\ldots$.

Isto nos dá essencialmente as séries $\sum \frac{1}{2n-1}$ e $\sum \frac{1}{2n}$, ambas divergentes. $\left(\text{A segunda, por ser “igual” a } \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n} \text{ e a primeira porque } \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}.\right)$

Investigaremos agora se as propriedades aritméticas, tais como associatividade, comutatividade, etc. se estendem das somas finitas para as séries.

Comecemos com a *associatividade.* Dada uma série convergente Σa_n, que efeito resulta de inserirmos parênteses entre seus termos? Por exemplo, que alteração ocorre ao passarmos da série $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \ldots$ para a série

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \ldots ?$$

A resposta é simples. Seja (s_n) a seqüência das reduzidas da série Σa_n. Ao inserirmos parênteses entre os termos de Σa_n obteremos uma nova série cuja seqüência de reduzidas é uma subseqüência de (s_n). Por exemplo, se os parênteses forem inseridos como no caso acima, passaremos da seqüência (s_n) para (s_{2n}) pois a segunda série tem como reduzidas $a_1 + a_2 = s_2$, $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = s_4$, etc.

Se a série Σa_n converge, então (s_n) converge e portanto toda subseqüência de (s_n) também converge para o mesmo limite. Assim, inserindo parênteses entre os termos de uma série convergente, obteremos ainda uma série convergente, com a mesma soma que a original. Esta é a propriedade *associativa* das séries.

O mesmo não ocorre se *dissociamos* termos de uma série convergente. Neste caso poderemos obter uma série divergente. A série antiga pode ser considerada como obtida da nova por associação de termos: as reduzidas da série original formam uma subseqüência das reduzidas da nova série. Aquelas podiam convergir sem que estas convirjam. O exemplo mais evidente deste fenômeno é fornecido pela série $0 + 0 + \ldots$ que é, obviamente, convergente. Escrevendo $0 = 1 - 1$ passamos a ter, por dissociação, a série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, que é divergente. Mais geral-

mente, dada qualquer série convergente Σa_n, podemos escrever $a_n = a_n + 1 - 1$. A série Σa_n resulta então, por associatividade, da série $a_1 + 1 - 1 + a_2 + 1 - 1 + a_3 + 1 - 1 + \ldots$, a qual é divergente, pois, seu termo geral não tende para zero.

Existe porém uma situação em que se pode garantir que a dissociação de termos de uma série não afeta sua convergência nem o valor da soma. É o caso de uma série absolutamente convergente Σa_n, na qual se decompõem seus termos como somas finitas $a_n = a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^k$ de parcelas com o mesmo sinal. Examinemos este caso.

Olhemos primeiro para uma série convergente Σa_n, com $a_n \geq 0$ para todo n. Se escrevermos cada a_n como soma (finita) de números não-negativos, obteremos uma nova série Σb_n, com $b_n \geq 0$ para todo n, cuja seqüência (t_n) de reduzidas é não-decrescente e possui a subseqüência (s_n) das reduzidas de Σa_n. Se (s_n) converge então (t_n) converge para o mesmo limite e conseqüentemente Σb_n é convergente e tem a mesma soma que Σa_n.

No caso geral, se Σa_n é absolutamente convergente, escrevemos $\Sigma a_n = \Sigma p_n - \Sigma q_n$ onde p_n e q_n são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa de a_n. Toda decomposição dos a_n em somas finitas de parcelas com o mesmo sinal determina uma dissociação em Σp_n e outra em Σq_n. Pelo que vimos acima, isto mantém a convergência de Σp_n, de Σq_n e o valor de cada soma. Logo, a nova série é convergente e tem a mesma soma que Σa_n.

Exemplo 39. Sejam Σa_n e Σb_n séries convergentes, com somas s e t respectivamente. Sabemos que $\Sigma(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\ldots$ converge e sua soma é $s+t$. Afirmamos que vale a dissociatividade $s+t = a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots$. Isto não decorre do que acabamos de provar, pois não estamos supondo convergência absoluta. Mas, chamando de s_n as reduzidas de Σa_n e t_n as reduzidas de Σb_n, a série $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \ldots$ tem como reduzidas de ordem par $r_{2n} = s_n + t_n$ e como reduzidas de ordem ímpar $r_{2n-1} = s_{n-1} + t_{n-1} + a_n$. Como

$\lim a_n = 0$, segue-se que $\lim r_{2n} = \lim r_{2n-1} = s + t$. Logo existe $\lim r_n = s + t$.

Abordaremos agora o problema da comutatividade. Dada uma série Σa_n, *mudar a ordem* dos seus termos significa tomar uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e considerar a série Σb_n, onde $b_n = a_{\varphi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O problema é, então, o seguinte: supondo Σa_n convergente, será ainda Σb_n convergente? No caso afirmativo, vale $\Sigma a_n = \Sigma b_n$?

Diremos que uma série Σa_n é *comutativamente convergente* quando, para toda bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo-se $b_n = a_{\varphi(n)}$, a série Σb_n é convergente e $\Sigma a_n = \Sigma b_n$.

Demonstraremos abaixo que Σa_n é comutativamente convergente se, e somente se, é absolutamente convergente. Comecemos com um exemplo de como uma mudança da ordem nos termos de uma série pode alterar a soma.

Exemplo 40. Sabemos que $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ é convergente (e até já informamos que $s = \log 2$, mas isto não vem ao caso). É lícito multiplicar os termos de uma série convergente por um número real. Multiplicando por $1/2$, obtemos $\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots$. Podemos escrever, evidentemente,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$
$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots$$

Também é lícito somar termo a termo duas séries convergentes. Logo

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

Vê-se que os termos da série acima, cuja soma é $\frac{3s}{2}$, são os mesmos da série inicial, cuja soma é s, apenas com uma mudança

de ordem. Logo um rearranjo na ordem dos termos de uma série convergente pode alterar o valor da sua soma.

Vejamos agora um resultado positivo.

Teorema 22. *Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

Demonstração. Começemos com uma série convergente Σa_n, onde $a_n \geq 0$ para todo n. Seja $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e ponhamos $b_n = a_{\varphi(n)}$. Afirmamos que $\Sigma b_n = \Sigma a_n$. Com efeito, sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b + \cdots + b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, chamemos de m o maior dos números $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$. Então $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\} \subset [1, m]$. Segue-se que $t_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = s_m$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \leq s_m$. De modo análogo (considerando-se φ^{-1} em vez de φ) se vê que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $s_m \leq t_n$. Concluímos que $\lim s_n = \lim t_n$, ou seja $\Sigma a_n = \Sigma b_n$.

No caso geral, temos $\Sigma a_n = \Sigma p_n - \Sigma q_n$, onde p_n e q_n são respectivamente a parte positiva e a parte negativa de a_n. Toda reordenação (b_n) dos termos a_n origina uma reordenação (u_n) para os p_n e uma reordenação (v_n) dos q_n, de tal modo que cada u_n é a parte positiva e cada v_n é a parte negativa de b_n. Pelo que acabamos de ver, $\Sigma u_n = \Sigma p_n$ e $\Sigma v_n = \Sigma q_n$. Logo $\Sigma a_n = \Sigma u_n - \Sigma v_n = \Sigma b_n$, o que prova o teorema.

O seguinte resultado, devido a Riemann, contém a recíproca do teorema anterior.

Teorema 23. *Seja Σa_n uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real c, existe uma reordenação (b_n) dos termos de Σa_n, tal que $\Sigma b_n = c$.*

Demonstração. Sejam p_n a parte positiva e q_n a parte negativa de a_n. Como Σa_n converge condicionalmente, temos $\lim a_n = 0$, donde $\lim p_n = \lim q_n = 0$, mas $\Sigma p_n = \Sigma q_n = +\infty$. Reordenaremos os termos da série Σa_n tomando como primeiros termos $p_1, p_2, \ldots, p_{n_1}$, onde n_1 é o menor índice tal que

$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > c$. Em seguida, tomaremos os termos negativos $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{n_2}$, onde n_2 é o menor índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} < c$. As escolhas de n_1 e n_2 são possíveis porque $\Sigma p_n = \Sigma q_n = +\infty$. Continuamos assim: escolhemos o menor índice n_3 tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > c$$

e depois o menor índice n_4, tal que

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} < c.$$

Prosseguindo desta maneira, obtemos uma reordenação de Σa_n tal que as reduzidas t_n da nova série tendem para c. Com efeito para todo i ímpar temos $t_{n_i+1} < c < t_{n_i}$, $0 < t_{n_i} - c \leq p_{n_i}$, $0 < c - t_{n_i+1} < q_{n_i+1}$. Daí resulta (levando em conta que $\lim p_{n_i} = \lim q_{n_i} = 0$) que $\lim\limits_{i \to \infty} t_{n_i} = c$. Além disso, é claro que, para i ímpar $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_i+1} \leq t_n \leq t_{n_i}$ e, para i par, $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_i} \leq t_n \leq t_{n_i+1}$. Assim $\lim t_n = c$, ou seja, a nova série tem soma c.

Observação: Um raciocínio análogo (mais simples) mostra que uma conveniente mudança na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente pode fazer com que suas reduzidas tendam a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Teorema 24. *Se Σa_n e Σb_n $(n \geq 0)$ são absolutamente convergentes então $(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = \Sigma c_n$ onde, para cada $n \geq 0$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 0$, temos

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

onde $x_n = a_0 b_n + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n + \cdots + a_n b_0$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos $(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = \Sigma x_n$ $(n \geq 0)$. Por dissociação

de termos de Σx_n, formemos uma série $\Sigma a_i b_j$, cujos termos são ordenados de tal forma que as parcelas $a_i b_j$ de x_n precedam as de x_{n+1}. Para cada $k \geq 0$, a reduzida de ordem $(k+1)^2$ da série $\Sigma|a_i b_j|$ é igual a

$$\sum_{i,j=0}^{k} |a_i||b_j| = \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{k} |b_j|\right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right).$$

Assim, a seqüência (não-decrescente) das reduzidas da série $\Sigma|a_i b_j|$ é limitada, porque possui uma subseqüência limitada. Logo $\Sigma a_i b_j$ converge absolutamente. Sua convergência e o valor da sua soma não se alteram se agruparmos num único termo c_n todas as parcelas $a_i b_j$ com $i + j = n$. Portanto $(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = \Sigma x_n = \Sigma a_i b_j = \Sigma c_n$.

Exercícios

1. Se $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$. Dê um contra-exemplo mostrando que a recíproca é falsa, salvo quando $a = 0$.

2. Seja $\lim x_n = 0$. Para cada n, ponha $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Prove que $y_n \to 0$.

3. Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$, prove que $\lim x_n = a$.

4. Se $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k$ e $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}_1} x_n = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_2} x_n = \cdots = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_k} x_n = a$, então, $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$.

5. Dê exemplo de uma seqüência (x_n) e uma decomposição $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \ldots$ de $\mathbb{N}$ como reunião de uma infinidade de subconjuntos infinitos tais que, para todo k, a subseqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_k}$ tenha limite a, mas não se tem $\lim x_n = a$.
   [*Sugestão*: Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\mathbb{N}_k$ o conjunto dos números

naturais da forma $n = 2^{k-1} \cdot m$, onde m é ímpar. Dado $n \in \mathbb{N}_k$, ponha $x_n = 1$ se n for o menor elemento de $\mathbb{N}_k$ e $x_n = \frac{1}{n}$, nos demais casos.]

6. Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$ então $\lim y_n$ é igual a a.

7. Seja $a \neq 0$. Se $\lim \frac{y_n}{a} = 1$ então $\lim y_n$ é igual a a.

8. Seja $b \neq 0$. Se $\lim x_n = a$ e $\lim \frac{x_n}{y_n} = b$, então, $\lim y_n = \frac{a}{b}$.

9. Se $\lim x_n = a \neq 0$ e $\lim x_n y_n = b$ então $\lim y_n = \frac{b}{a}$.

10. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n, então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

11. Use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dos $n+1$ números $1 - 1/n, \ldots, 1 - 1/n$, 1 e prove que a seqüência $(1 - 1/n)^n$ é crescente. Conclua que $(1 - 1/n)^n \geq 1/4$ para todo $n > 1$.

11a. Sejam $x_n = (1 + 1/n)^n$ e $y_n = (1 - 1/(n+1))^{n+1}$. Mostre que $\lim x_n y_n = 1$ e deduza daí que $\lim(1 - 1/n)^n = e^{-1}$.

12. Fazendo $y = x^{1/k}$ e $b = a^{1/k}$ na identidade $y^k - b^k = (y-b) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y^i b^{k-i-1}$ obtenha $x - a = (x^{1/k} - a^{1/k}) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^{i/k} \cdot a^{1-(i+1)/k}$ e use isto para provar que se $\lim x_n = a > 0$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Conclua, daí, que $\lim_{n\to\infty} (x_n)^r = a^r$ para todo racional r.

13. Prove que, para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$. [*Sugestão*: Pelo Exercício 11, basta considerar o caso em que $r = \frac{p}{q}$ é > 0. Examine a subseqüência onde

$n = p \cdot m$. Para esses valores de n, tem-se $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{qm}\right)^{qm}\right]^{p/q}$. Use o Exercício 12.]

14. Seja $a \geq 0$, $b \geq 0$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

15. Dada uma seqüência (x_n), um termo x_p chama-se um "termo destacado" quando $x_p \geq x_n$ para todo $n > p$. Seja $P = \{p \in \mathbb{N}; x_p \text{ é destacado}\}$. Se $P = \{p_1 < p_2 < \ldots\}$ for infinito, $(x_p)_{p\in P}$ é uma subseqüência não-crescente de (x_n). Se P for finito (em particular, vazio), mostre que existe uma subseqüência crescente de (x_n). Conclua que toda seqüência possui uma subseqüência monótona.

16. Seja (x_n) uma seqüência limitada. Se $\lim a_n = a$ e cada a_n é um valor de aderência de (x_n), então a é um valor de aderência de (x_n).

17. Sejam (x_n) e (y_n) seqüências limitadas. Ponhamos $a = \liminf x_n$, $A = \limsup x_n$, $b = \liminf y_n$ e $B = \limsup y_n$. Prove que

a) $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B$ $\quad\liminf(x_n + y_n) \geq a + b$;
b) $\limsup(-x_n) = -a$, $\quad\liminf(-x_n) = -A$;
c) $\limsup(x_n \cdot y_n) \leq A \cdot B$ e $\quad\liminf(x_n \cdot y_n) \geq ab$;

valendo as duas últimas desigualdades sob a hipótese de $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$. Dê exemplos em que se tenham desigualdades estritas nas relações acima.

18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq t_n \leq 1$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim[t_n x_n + (1 - t_n)y_n] = a$.

19. Diz-se que uma seqüência (x_n) tem *variação limitada* quando a seqüência (v_n) dada por $v_n = \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|$ é limitada. Prove que, nesse caso, (v_n) converge. Prove também:

a) Se (x_n) tem variação limitada, então existe $\lim x_n$;

b) Se $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $0 \leq c < 1$, então (x_n) tem variação limitada;

c) (x_n) tem variação limitada se, e somente se, $x_n = y_n - z_n$ onde (y_n) e (z_n) são seqüências não-decrescentes limitadas;

d) Dê exemplo de uma seqüência convergente que não seja de variação limitada.

20. Seja $x_1 = 1$ e ponha $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe $a = \lim x_n$ e determine a.

21. Ponha $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Mostre que a seqüência (x_n), assim obtida, é limitada. Determine $a = \lim x_n$.

22. A fim de que a seqüência (x_n) não possua subseqüência convergente é necessário e suficiente que $\lim |x_n| = +\infty$.

23. Seja $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma seqüência de números naturais. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

    a) $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty$;

    b) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}(k)$ é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$;

    c) Para todo subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}(F)$ é finito.

    Em particular, se $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ for injetiva, então $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty$.

24. Seja (x_n) uma seqüência de números reais e suponha que $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cumpre uma das (e portanto todas as) condições do exercício anterior. Prove que se $\lim x_n = a$ e

$y_n = x_{\varphi(n)}$, então $\lim y_n = a$. Dê exemplo de $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva, tal que $\lim x_n = a$, mas não vale $\lim y_n = a$, onde $y_n = x_{\varphi(n)}$.

25. Seja $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existirem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $0 < |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq c < 1$ para todo $n > n_0$, então $\lim x_n = 0$. Se porém $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \geq c > 1$ para todo $n > n_0$, então $\lim |x_n| = +\infty$. Como aplicação, reobtenha os Exemplos 21 e 22 e mostre que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

26. Seja T um arranjo triangular de números não-negativos,

$$\begin{array}{lllll} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \ldots & t_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Faça duas hipóteses sobre o arranjo T. Primeira: cada linha tem soma igual a 1. Segunda: cada coluna tem limite zero: $\lim\limits_{n\to\infty} t_{ni} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dada uma seqüência convergente (x_n), com $\lim x_n = a$, use o arranjo T para transformá-la numa seqüência (y_n), com

$$y_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n.$$

Prove que $\lim y_n = a$.
[*Sugestão*: Considere inicialmente o caso $a = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/2$. Existe também $A > 0$, tal que $|x_n| < A$ para todo n. Em seguida, obtenha $q \in \mathbb{N}$, tal que $n > q \Rightarrow |t_{n1}| < \delta$, $|t_{n2}| < \delta, \ldots, |t_{np}| < \delta$, onde $\delta = \frac{\varepsilon}{2pA}\cdot$ Tome $n_0 = \max\{p, q\}$. Observe que $n > n_0 \Rightarrow |y_n| \leq t_{n1}|x_1| + \cdots + t_{np}|x_p| + \cdots + t_{nn}|x_n|$, onde a soma das p primeiras parcelas não

excede $\varepsilon/2$ e a soma das $n-p$ parcelas restantes não supera $(t_{n,p+1}+\cdots+t_{nn})\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Logo, $|y_n|<\varepsilon$. O caso geral reduz-se imediatamente a este.]

27. Se $\lim x_n = a$, pondo $y_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$. (*Sugestão*: Use o exercício anterior.)

28. Se $\lim x_n = a$, e os x_n são todos positivos, então $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$. [*Sugestão*: Tome logaritmos e reduza ao problema anterior.] Conclua que se $a_n > 0$ e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ então $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

29. Seja $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\Sigma y_n = +\infty$. Se $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ então $\lim \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n} = a$.

30. Se (y_n) é crescente e $\lim y_n = +\infty$, então $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = a$. (Use o Exercício 29.)

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}\cdot$ (Use o exercício anterior.)

32. Para todo $n\in\mathbb{N}$, tem-se $0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n!n}\cdot$ Conclua daí que o número e é irracional.

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e}\cdot$ (Use o final do Exercício 28.)

34. Prove que se definirmos a_n pela igualdade $n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot a_n$, teremos $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

35. Seja Σa_n e Σb_n séries de termos positivos. Se $\Sigma b_n = +\infty$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$ então $\Sigma a_n = +\infty$.

36. Sejam Σa_n e Σb_n series de termos positivos. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e Σb_n converge então Σa_n converge. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ então Σa_n converge se, e somente se, Σb_n converge.

37. Para todo polinômio $p(x)$ de grau superior a 1, a série $\sum \frac{1}{p(n)}$ converge.

38. Se $-1 < x < 1$ e $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ então $\lim_{n\to\infty} \binom{m}{n} x^n = 0$ para quaisquer $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

39. Se a seqüência (a_n) é não-crescente e $\lim a_n = 0$, o mesmo ocorre com $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. Conclua que, neste caso, a série $a_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - \dots$ é convergente.

40. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$ é convergente e calcule sua soma.

41. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, a série $\sum_n \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$ converge.

42. Se Σa_n converge e $a_n > 0$ então $\Sigma (a_n)^2$ e $\Sigma \frac{a_n}{1+a_n}$ convergem.

43. Se $\Sigma (a_n)^2$ converge então $\Sigma \frac{a_n}{n}$ converge.

44. Se (a_n) é decrescente e Σa_n converge então $\lim n \cdot a_n = 0$.

45. Se (a_n) é decrescente e $\Sigma a_n = +\infty$, então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = 1.$$

46. Seja (a_n) uma seqüência não-crescente, com $\lim a_n = 0$. A série Σa_n converge se, e somente se, $\Sigma 2^n \cdot a_{2^n}$ converge.

47. Prove que o conjunto dos valores de aderência da seqüência $x_n = \cos(n)$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

48. Sejam a, b números reais positivos. Defina indutivamente as seqüências (x_n), (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a+b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que x_n e y_n convergem para o mesmo limite, chamado a *média aritmético-geométrica* entre a e b.

49. Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ e $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$. Prove que a seqüência (s_n) é limitada e que $\limsup s_n - \liminf s_n = \lim a_n$.

Capítulo V

Topologia da Reta

Estudaremos neste capítulo as principais propriedades topológicas dos subconjuntos da reta. Chamam-se assim as propriedades que se baseiam nas noções de proximidade e limite. Elas estão fortemente relacionadas com o comportamento das funções contínuas.

Este capítulo prepara o terreno para o seguinte e, principalmente, para o Capítulo VII, onde é introduzida a noção de função contínua. As idéias aqui apresentadas pertencem a uma parte da Matemática chamada Topologia, cujo escopo é estabelecer, com grande generalidade, a noção de limite, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos onde tais funções são definidas e tomam valores. Para que tenha sentido determinar o limite ou indagar sobre a continuidade de uma função, o domínio e o contradomínio da mesma devem possuir um certo tipo de estrutura, tornando-se o que se chama um "espaço topológico". Em outras palavras, espaços topológicos são conjuntos equipados com estruturas tais que entre eles tem sentido falar em limites e continuidade de funções.

O conjunto dos números reais é o espaço topológico mais freqüentemente utilizado e por isso o mais importante. Os Capítulos V, VI e VII (e os primeiros §§ do Capítulo IV) formam um pequeno compêndio de topologia da reta. Vale dizer, porém, que não nos estendemos além do que julgamos necessário para a

boa compreensão dos conceitos básicos da Análise.

Como ficou combinado, as demonstrações que daremos se basearão apenas nos axiomas dos números reais e nas conseqüências que deles deduzimos nos capítulos anteriores. Utilizaremos, porém, com freqüência cada vez maior, a linguagem geométrica segundo a qual nos referiremos ao corpo $\mathbb{R}$ como "a reta", diremos "ponto" em vez de "número real", traduziremos "$a < b$" por "a está à esquerda de b", dados $x, y \in \mathbb{R}$, interpretaremos o valor absoluto $|x-y|$ como "distância do ponto x ao ponto y" e, finalmente, veremos o intervalo $[a, b]$ como o segmento de reta cujos extremos são os pontos a e b.

Assim procedendo, estaremos atribuindo um conteúdo intuitivo aos conceitos formais introduzidos pela axiomática dos números reais. Esta atitude, quando olhada sob o ponto de vista estritamente matemático, é inofensiva: trata-se apenas de utilizar sinônimos geométricos para nomes aritméticos. Do ponto de vista de estilo, ela é conveniente pois permite evitar repetições deselegantes, tornando a leitura mais agradável. Finalmente, do ponto de vista educativo, ela é valiosa porque possibilita "enxergar" os conceitos e, muitas vezes, prever os resultados (ou pelo menos torná-los aceitáveis) graças à imagem experimental que possuímos de uma reta como um contínuo de pontos alinhados, sem lacunas, sem princípio e sem fim.

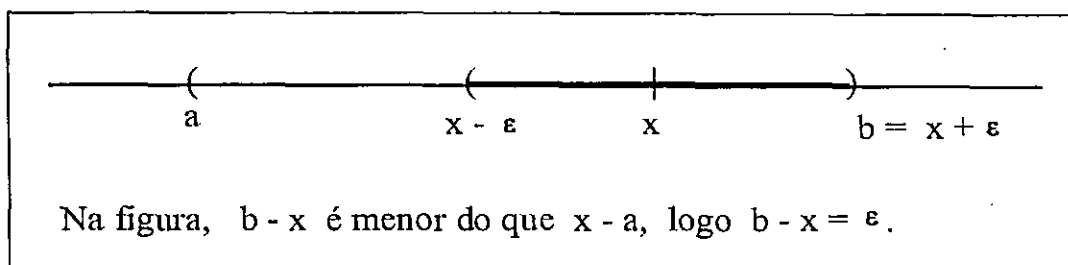
1 Conjuntos abertos

As idéias que apresentaremos neste parágrafo são motivadas pelo seguinte tipo de observação: seja a um número real maior do que 2. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de a ainda se tem $x > 2$. Isto é, se deslocarmos a um pouquinho para a esquerda (ou, evidentemente, para a direita) obteremos ainda um número maior do que 2. Já o mesmo não ocorre quando tomamos um número racional r e o olhamos como número racional. Deslocando-o um pouco para qualquer dos lados, podemos encontrar um número irracional. Assim, enquanto a pro-

priedade de ser > 2 é *estável* (pequenos deslocamentos não a destroem), a propriedade de ser racional é *instável*. Os conjuntos definidos por meio de propriedades estáveis são os que chamaremos de *abertos*. Passemos agora às definições formais.

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ chama-se *ponto interior* de X quando existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset X$. (Isto quer dizer que todos os pontos suficientemente próximos de x ainda pertencem ao conjunto X.)

Para que $x \in X$ seja um ponto interior do conjunto X é necessário (e suficiente) que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$. Com efeito, se $x \in (a, b) \subset X$, seja ε o menor dos números positivos $x - a$ e $b - x$. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$, logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.

Na figura, b - x é menor do que x - a, logo b - x = ε.

Equivalentemente, x é um ponto interior do conjunto X se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in X$. De fato, $|y - x| < \varepsilon$ significa que y pertence ao intervalo aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ que são interiores a X será representado por $\text{int}(X)$ e chamado o *interior do conjunto* X. Temos $\text{int}(X) \subset X$ e, evidentemente, se $X \subset Y$ então $\text{int}(X) \subset \text{int}(Y)$.

Exemplos.

1. Se o conjunto X possui algum ponto interior, ele deve conter pelo menos um intervalo aberto, logo é infinito. Assim, se $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto finito, nenhum dos seus pontos é interior, ou seja, temos $\text{int}(X) = \emptyset$. Melhor ainda, como todo intervalo aberto é um conjunto não-enumerável, se $\text{int}(X) \neq \emptyset$

então X é não-enumerável. Em particular, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não possui pontos interiores, isto é $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Segue-se que $\text{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$. Também o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais (embora seja não-enumerável) não possui pontos interiores. De fato, todo intervalo aberto deve conter números racionais, logo $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não pode conter um intervalo aberto. Assim $\text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$.

2. Se $X = (a, b)$, ou $X = (-\infty, b)$ ou $X = (a, +\infty)$, então $\text{int}(X) = X$. No primeiro caso, para todo $x \in X$ temos $x \in (a, b) \subset X$. No segundo caso, dado arbitrariamente $x \in X$ escolhemos $a < x$ e temos $x \in (a, b) \subset X$. O terceiro caso é análogo ao segundo.

3. Sejam $X = [c, d]$, $Y = [c, +\infty)$ e $Z = (-\infty, d]$. Então $\text{int}(X) = (c, d)$, $\text{int}(Y) = (c + \infty)$ e $\text{int}(Z) = (-\infty, d)$. Basta examinar X. Para cada $x \in (c, d)$ temos $x \in (c, d) \subset X$ logo $(c, d) \subset \text{int}(X)$. Por outro lado $c \notin \text{int}(X)$, porque todo intervalo aberto contendo c possuirá pontos à esquerda de c, logo não estará contido em $[c, d]$. Do mesmo modo, o ponto d não é interior ao intervalo $[c, d]$. Logo o interior de $[c, d]$ reduz-se ao intervalo aberto (c, d). Analogamente, se $X_1 = [c, d)$ e $X_2 = (c, d]$, então $\text{int}(X_1) = \text{int}(X_2) = (c, d)$.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $\text{int}(A) = A$.

Assim A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$. Podemos interpretar o intervalo (a, b) como uma espécie de "margem de segurança" do ponto x, dentro da qual ele pode se movimentar sem correr o perigo de sair do conjunto A. Convém notar que tal margem de segurança não é a mesma para todos os pontos de A. Por exemplo, se $A = (2, +\infty)$, a margem de segurança de um ponto $x \in A$ é $x-2$. Ela é tanto menor quanto mais próximo de 2 esteja o ponto x.

4. O conjunto vazio é aberto. Com efeito, um conjunto X só pode deixar de ser aberto se existir em X algum ponto que não

seja interior. Como não existe ponto algum em $\emptyset$, somos forçados a admitir que $\emptyset$ é aberto. Evidentemente, a reta $\mathbb{R}$ inteira é um conjunto aberto.

5. Seja $A = (0,1) \cup (2,5)$. Então A é um subconjunto aberto da reta. Com efeito, para todo $x \in A$ tem-se $x \in (0,1)$ ou $x \in (2,5)$. Em qualquer caso, existe um intervalo aberto que contém x e está contido em A.

6. Um intervalo (limitado ou não) é um conjunto aberto se, e somente se, é um intervalo aberto. Isto decorre do Exemplo 3 acima. Todo conjunto aberto não-vazio é não-enumerável. Assim $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, seus subconjuntos e os conjuntos finitos da reta não são abertos. Nenhum conjunto formado apenas por números irracionais pode ser aberto, pois não contém intervalos.

Teorema 1. a) *Se* $A_1 \subset \mathbb{R}$ *e* $A_2 \subset \mathbb{R}$ *são abertos, então* $A_1 \cap A_2$ *é aberto.*
b) *Seja* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família arbitrária de conjuntos abertos* $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. *A reunião* $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *é um conjunto aberto.*

Demonstração. a) Seja $x \in A_1 \cap A_2$. Então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Logo existem intervalos tais que $x \in (a_1, b_1) \subset A_1$ e $x \in (a_2, b_2) \subset A_2$. Sejam a o maior dos números a_1, a_2, e b o menor dos números b_1, b_2. Então $x \in (a,b) = (a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) \subset A_1 \cap A_2$. Assim, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é interior e portanto esta interseção é um conjunto aberto.
b) Seja $x \in A = \cup A_\lambda$. Então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, podemos obter um intervalo (a,b) tal que $x \in (a,b) \subset A_\lambda$. Como $A_\lambda \subset A$, temos $x \in (a,b) \subset A$. Logo todo ponto $x \in A$ é interior e por conseguinte A é aberto.

Observação: Ao demonstrarmos o item a) do teorema acima utilizamos o fato de que se os intervalos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) têm em comum algum ponto x, então a interseção $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ é igual ao intervalo (a,b), onde a é o maior dos números a_1, a_2 e b é o menor dos números b_1, b_2. O leitor deve convencer-se

disto primeiramente desenhando uma figura. Depois deve tentar prová-lo formalmente. Se não conseguir, eis a demonstração: inicialmente, note que existe o intervalo (a, b), isto é, vale $a < b$, porque as hipóteses $a_1 < x < b_1$ e $a_2 < x < b_2$ implicam que qualquer dos números a_1, a_2 é menor do que ambos os números b_1, b_2. Em seguida, observe que sendo $a = \max\{a_1, a_2\}$, um número y é maior do que a se, e somente se, $y > a_1$ e $y > a_2$. Do mesmo modo, sendo $b = \min\{b_1, b_2\}$, tem-se $y < b$ se, e somente se, $y < b_1$ e $y < b_2$. Assim $a < y < b \Leftrightarrow a_1 < y < b_1$ e $a_2 < y < b_2$. Ou seja $y \in (a,b) \Leftrightarrow y \in (a_1, b_1)$ e $y \in (a_2, b_2)$. Isto quer dizer: $(a, b) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. Argumentos deste tipo são considerados "elementares". Aos poucos eles serão omitidos, em benefício da clareza do texto.

Corolário. *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto. Em palavras: a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Com efeito, aplicando $n - 1$ vezes o Teorema 1 obtemos $A_1 \cap A_2$ aberto, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$ aberto, $\ldots, A_1 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n$ aberto.

Exemplos.

7. A interseção de uma infinidade de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo, se considerarmos os conjuntos abertos $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, temos $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$, mas o conjunto $\{0\}$ não é aberto. [Para ver que $\cap A_n = \{0\}$, basta notar que $0 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $0 \in \cap A_n$. Por outro lado, se $x \neq 0$ então $|x| > 0$ e, portanto, existe n tal que $0 < \frac{1}{n} < |x|$. Isto significa que $x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = A_n$. Assim, $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \cap A_n$.] Mais geralmente, temos $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada $A_n = \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ é aberto mas

a interseção $[a, b]$ não é um conjunto aberto.

8. Seja $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de números reais. Podemos admitir que a numeração foi feita de modo que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Então $\mathbb{R} - F = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty)$. Concluímos que $\mathbb{R} - F$ é aberto. Ou seja, o complementar de todo conjunto finito é aberto. De modo análogo, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é aberto, pois $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ é uma reunião (agora infinita) de conjuntos abertos.

9. Todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ é uma reunião de intervalos abertos. Com efeito, para cada $x \in A$, escolhamos um intervalo aberto I_x tal que $x \in I_x \subset A$. Isto pode ser escrito assim: $\{x\} \subset I_x \subset A$. Tomando reuniões, temos $\bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A$, ou seja, $A \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A$, o que nos dá $A = \bigcup_{x \in A} I_x$.

Este resultado pode ser substancialmente melhorado. Com efeito, temos o

Teorema 2. (Estrutura dos abertos da reta.) *Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ se exprime, de modo único, como uma reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*

Na demonstração, faremos uso do lema abaixo.

Lema. *Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos abertos, todos contendo o ponto $p \in \mathbb{R}$. Então $I = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ é um intervalo aberto.*

Demonstração. Para todo $\lambda \in L$, seja $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$. Para começar, notemos que $a_\lambda < b_\mu$ sejam quais forem $\lambda, \mu \in L$, porque $a_\lambda < p$ e $p < b_\mu$. Logo, se tomarmos $a = \inf\{a_\lambda; \lambda \in L\}$ e $b = \sup\{b_\lambda; \lambda \in L\}$, teremos $a < b$. (Pode ocorrer que seja $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.) Afirmamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. A inclusão $\cup I_\lambda \subset (a, b)$ é clara. Reciprocamente, se $a < x < b$, então pelas definições de sup e de inf, existem $\lambda, \mu \in L$ tais que $a_\lambda < x < b_\mu$. Se valer $x < b_\lambda$, muito bem: teremos $x \in I_\lambda$. Se, porém, tivermos $b_\lambda \leq x$ isto trará $a_\mu < b_\lambda \leq x$, donde

$a_\mu < x < b_\mu$, ou seja $x \in I_\mu$. Em qualquer hipótese, $x \in \cup I_\lambda$. Logo $(a, b) \subset \cup I_\lambda$, o que completa a demonstração.

Demonstração do Teorema 2. Para cada $x \in A$, seja I_x a reunião dos intervalos abertos que contêm x e estão contidos em A. Pelo lema, cada I_x é um intervalo aberto, sendo evidentemente $x \in I_x \subset A$. Se I é um intervalo aberto qualquer contendo x e contido em A, então I é membro da família cuja reunião deu I_x. Logo $I \subset I_x$. Isto se exprime dizendo que I_x é o maior intervalo aberto que contém x e está contido em A. Afirmamos que, dados $x, y \in A$, ou se tem $I_x = I_y$ ou então $I_x \cap I_y = \emptyset$. Com efeito, se existir algum $z \in I_x \cap I_y$ então $I = I_x \cup I_y$ é um intervalo contendo x e contido em A, donde $I \subset I_x$ e, daí, $I_y \subset I_x$. Por motivo análogo, $I_x \subset I_y$. Logo $I_x = I_y$. Isto nos permite afirmar que os intervalos I_x são dois a dois disjuntos. Evidentemente, temos $A = \cup I_x$, já que $x \in I_x \subset A$ para todo $x \in A$. Fica assim estabelecido que todo conjunto aberto A pode ser decomposto como reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos, que chamaremos os *intervalos componentes* de A. Para verificar que a coleção dos intervalos componentes de A é enumerável basta escolher, em cada componente J um número racional $r(J)$. A função $J \mapsto r(J)$ é injetiva porque $J \neq J' \Rightarrow J \cap J' = \emptyset \Rightarrow r(J) \neq r(J')$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, nossa afirmação segue-se do Corolário 1 do Teorema 8, Capítulo II. Resta agora provar a unicidade. Para isto, suponhamos que se tenha $A = \cup J_m$ onde os J_m são intervalos abertos, dois a dois disjuntos. Afirmamos que, nestas condições, para cada $J_m = (a_m, b_m)$, suas extremidades não pertencem ao conjunto A. Com efeito, se tivéssemos, por exemplo, $a_m \in A$, seria $a_m \in J_p = (a_p, b_p)$ para algum $J_p \neq J_m$. Então, pondo $b = \min\{b_m, b_p\}$ teríamos $J_m \cap J_p \supset (a_m, b) \neq \emptyset$, um absurdo. Segue-se daí que, para cada m e cada $x \in J_m$, J_m é o maior intervalo aberto que contém x e está contido em A. Logo $J_m = I_x$ (= reunião dos intervalos abertos contendo x e contidos em A). Isto prova que existe uma única maneira de exprimir um aberto A como reunião (necessariamente enumerável) de intervalos

abertos, dois a dois disjuntos.

Corolário. *Seja* I *um intervalo aberto. Se* $I = A \cup B$, *onde* A *e* B *são conjuntos abertos disjuntos, então um desses conjuntos é igual a* I *e o outro é vazio.*

Com efeito, se $I = A \cup B$ fosse possível com A e B disjuntos e ambos não-vazios, as decomposições de A e B em seus intervalos componentes dariam, pelo menos, dois intervalos componentes para I, o que é absurdo, em virtude da unicidade estabelecida no Teorema 2.

2 Conjuntos fechados

Diremos que um ponto a é *aderente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a for limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X$.

Todo ponto $a \in X$ é aderente a X: basta tomar a seqüência de pontos $x_n = a$. Mas pode-se ter a aderente a X sem que a pertença a X (na realidade, este é o caso mais interessante). Por exemplo, se $X = (0, +\infty)$, então $0 \notin X$, mas 0 é aderente a X, pois $0 = \lim \frac{1}{n}$, onde $\frac{1}{n} \in X$ para todo n.

Observação: Todo valor de aderência de uma seqüência (x_n) é um ponto aderente do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Mas a recíproca é falsa: nem todo ponto aderente a X é valor de aderência de (x_n). Por exemplo, se $\lim x_n = a$, o único valor de aderência de (x_n) é a, mas todos os pontos x_n, por pertencerem a X, são pontos aderentes a X.

Teorema 3. *Um ponto* $a \in \mathbb{R}$ *é aderente a um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *tem-se* $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração. Se a é aderente a X então $a = \lim x_n$ com $x_n \in X$ para todo n. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo n suficientemente grande. Logo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, supondo satisfeita esta condição, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in X$ tal

que $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Isto define uma seqüência de pontos $x_n \in X$ tais que $|x_n - a| < \frac{1}{n}\cdot$ Logo $\lim x_n = a$ e então a é aderente a X.

Corolário 1 (Equivalente ao teorema.) *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, para todo intervalo aberto I contendo a tem-se $I \cap X \neq \emptyset$.*

Com efeito, todo intervalo aberto contendo a contém um intervalo do tipo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Corolário 2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e $Y \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Então $a = \inf X$ é aderente a X e $b = \sup Y$ é aderente a Y.*

Com efeito, para todo $\varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $a \leq x < a + \varepsilon$ e $b - \varepsilon < y \leq b$. Isto dá $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$.

Chamaremos *fecho* do conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos aderentes a X.

Evidentemente, $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. Tem-se também $X \subset \overline{X}$ para todo X. No caso de ser $X = \overline{X}$, diremos que o conjunto X é *fechado.*

Assim, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a X pertence a X.

Em outras palavras, para que X seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, então $a \in X$.

Quando $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio, limitado e fechado, tem-se $\sup X \in X$ e $\inf X \in X$.

Exemplos.

10. O fecho do intervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado $[a, b]$. Com efeito, os pontos a e b são aderentes ao intervalo aberto (a, b) pois $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)$ e $b = \lim\limits_{n\to\infty} \left(b - \frac{1}{n}\right)$. Logo, o

fecho de (a, b) inclui pelo menos o intervalo fechado $[a, b]$. Por outro lado, se $a < x_n < b$ e $\lim x_n = c$, então $a \leq c \leq b$. Logo todo ponto aderente ao intervalo aberto (a, b) pertence ao intervalo fechado $[a, b]$. Evidentemente, $[a, b]$ é também o fecho dos intervalos semi-abertos $[a, b)$ e $(a, b]$. Além disso, é claro que o fecho de $[a, b]$ é o próprio $[a, b]$, logo todo intervalo limitado fechado é um conjunto fechado. Também são fechados os conjuntos $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ e $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Note-se o caso particular $a = b$, que dá $[a, a] = \{a\}$. Assim, todo conjunto reduzido a um único ponto é fechado.

11. O fecho do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é a reta $\mathbb{R}$. Também o fecho do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é $\mathbb{R}$. Em particular, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são conjuntos fechados.

Teorema 4. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração. Basta observar que cada uma das afirmações abaixo é equivalente à seguinte: 1. F é fechado; 2. todo ponto aderente a F pertence a F; 3. se $a \in \mathbb{R} - F$ então a não é aderente a F; 4. se $a \in \mathbb{R} - F$ então existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $I \cap F = \emptyset$; 5. se $a \in \mathbb{R} - F$, então existe um intervalo aberto I tal que $a \in I \subset \mathbb{R} - F$; 6. todo ponto $a \in \mathbb{R} - F$ é interior a $\mathbb{R} - F$; 7. $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Corolário. a) *$\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.*

b) *Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são fechados então $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.*

c) *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

Com efeito, $\mathbb{R}$ é o complementar do aberto $\emptyset$, e $\emptyset$ é o complementar do aberto $\mathbb{R}$. Agora, $F_1, \ldots, F_n$ fechados $\Rightarrow$ $\mathbb{R} - F_1, \ldots, \mathbb{R} - F_n$ abertos $\Rightarrow$ $(\mathbb{R} - F_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{R} - F_n) = \mathbb{R} - (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ aberto $\Rightarrow F_1 \cup \cdots \cup F_n$ fechado. Finalmente,

cada F_λ fechado $\Rightarrow$ cada $\mathbb{R}-F_\lambda$ aberto $\Rightarrow \bigcup_\lambda(\mathbb{R}-F_\lambda) = \mathbb{R}-(\bigcap_\lambda F_\lambda)$ aberto $\Rightarrow \cap F_\lambda$ fechado. (Veja o Teorema 1.)

Cabe aqui uma observação análoga à que foi feita no exemplo 7: a reunião de uma família arbitrária de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado. Isto se vê facilmente: basta tomar um conjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$ que não seja fechado. Tem-se $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$. (Como todo conjunto, X é reunião dos seus pontos; cada ponto $x \in X$ forma um conjunto fechado $\{x\}$ mas a reunião X não é um fechado.)

Teorema 5. *O fecho de todo conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto fechado, isto é,* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração. Tomemos um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}-\overline{X}$. Pelo Corolário 1 do Teorema 3 concluímos que existe um intervalo aberto I com $x \in I$ e $I \cap X = \emptyset$ e que, para todo $y \in I$ vale $y \in \mathbb{R} - \overline{X}$. Logo $I \subset \mathbb{R} - \overline{X}$. Isto mostra que todo ponto $x \in \mathbb{R}-\overline{X}$ é um ponto interior, ou seja, que $\mathbb{R}-\overline{X}$ é aberto. Pelo Teorema 4, $\overline{X}$ é fechado.

Exemplos.

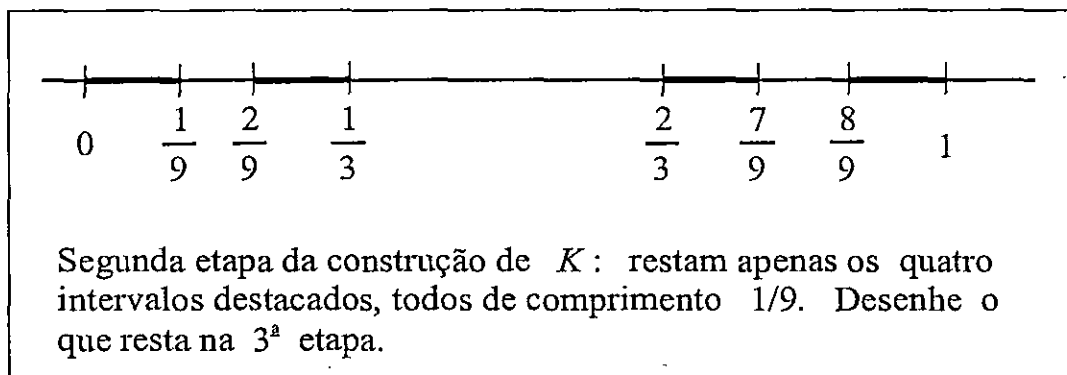
12. Todo conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é fechado pois, como vimos no Exemplo 8, seu complementar é aberto. Por motivo análogo, $\mathbb{Z}$ é fechado.

13. Existem conjuntos que não são fechados nem abertos, como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ou um intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$.

14. Os conjunto $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são ao mesmo tempo fechados e abertos. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é ao mesmo tempo fechado e aberto, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$. Com efeito, nestas condições, X e $\mathbb{R} - X$ são ambos abertos. Como $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = X \cup (\mathbb{R} - X)$, o corolário do Teorema 2 implica que $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

15. *O conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu

terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, temos $K = [0, 1] - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, isto é, $K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \cup I_n)$. Logo K é um conjunto fechado, interseção dos fechados $[0, 1]$ e $\mathbb{R} - \cup I_n$. Note-se que os pontos extremos dos intervalos omitidos, como 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, etc. pertencem ao conjunto de Cantor. Com efeito, em cada etapa da construção de K são

Segunda etapa da construção de K: restam apenas os quatro intervalos destacados, todos de comprimento 1/9. Desenhe o que resta na 3ª etapa.

retirados apenas pontos interiores nos intervalos restantes da etapa anterior. Esses pontos extremos dos intervalos omitidos formam um subconjunto infinito enumerável de K. Veremos logo mais, entretanto, que K não é enumerável. Por enquanto, notemos apenas que K não contém intervalo aberto algum e portanto nenhum $x \in K$ é ponto interior. Com efeito, depois da n-ésima etapa da construção de K restam apenas intervalos de comprimento $1/3^n$. Assim, dado qualquer intervalo aberto $J \subset [0, 1]$, de comprimento $l > 0$, ele não restará incólume depois da n-ésima etapa, se $1/3^n < l$. Conseqüentemente não se pode ter $J \subset K$.

Sejam X, Y conjuntos de números reais, com $X \subset Y$. Diremos que X é *denso* em Y quando todo ponto de Y for aderente a X.

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Também $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso

em $\mathbb{R}$. Mais ainda, dado qualquer intervalo não-degenerado J, o conjunto dos números racionais pertencentes a J e o conjunto dos números irracionais que estão em J são ambos conjuntos densos em J.

As seguintes afirmações são equivalentes a dizer que X é denso em Y. (Em todas elas, supõe-se $X \subset Y$.)

a) Todo ponto de Y é limite de uma seqüência de pontos de X.

b) $Y \subset \overline{X}$.

c) Para todo $y \in Y$ e todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

d) Todo intervalo aberto que contenha um ponto de Y deve conter também algum ponto de X. (Note que um intervalo aberto contendo $y \in Y$ deve conter um intervalo da forma $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$.)

Teorema 6. *Todo conjunto X de números reais contém um subconjunto enumerável E, denso em X.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, podemos exprimir a reta como reunião enumerável de intervalos de comprimento $1/n$. Basta notar que $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $p \in \mathbb{Z}$, escolhamos um ponto $x_{pn} \in X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ se esta interseção não for vazia (se for vazia, x_{pn} não existirá). O conjunto E dos pontos x_{pn} assim obtidos é enumerável. Afirmamos que E é denso em X. Com efeito, seja I um intervalo aberto contendo algum ponto $x \in X$. Para n suficientemente grande, o comprimento $1/n$ de cada intervalo $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ será menor do que a distância de x ao extremo superior de I. Portanto existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset I$. Logo $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap X \neq \emptyset$. Assim, existe o ponto x_{pn}, com

$x_{pn} \in I \cap E$. Isto mostra que todo intervalo aberto I que contém um ponto $x \in X$ contém também um ponto $x_{pn} \in E$. Logo E é denso em X.

Exemplo 16. O conjunto E dos extremos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor K é enumerável. Afirmamos que E é denso em K. Com efeito, dados $x \in K$ e $\varepsilon > 0$ mostraremos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$. Não faz mal supor $\varepsilon \leq 1/2$. Assim sendo, pelo menos um dos intervalos $(x-\varepsilon, x]$ ou $[x, x+\varepsilon)$ (digamos $[x, x+\varepsilon)$) está contido em $[0,1]$. Quando for $1/3^n < \varepsilon$, depois da n-ésima etapa da construção de K não restarão intervalos de comprimento $\geq \varepsilon$. Logo alguma parte do intervalo $[x, x+\varepsilon)$ será retirada na n-ésima etapa, ou foi retirada antes. (O intervalo inteiro $[x, x+\varepsilon)$ não pode ter sido retirado porque $x \in K$.) O extremo inferior da parte retirada de $[x, x+\varepsilon)$ é um ponto $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap E$.

3 Pontos de acumulação

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se *ponto de acumulação* do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ *diferente de* a.

O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado pela notação X' (e, às vezes, chamado o *derivado* de X).

A condição $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X) exprime-se simbolicamente do modo seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X; \quad 0 < |x-a| < \varepsilon.$$

Teorema 7. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $a \in X'$ *(a é ponto de acumulação de X);*

2. $a = \lim x_n$, *onde (x_n) é uma seqüência de elementos de X, dois a dois distintos;*

3. *todo intervalo aberto contendo* a *possui uma infinidade de elementos de* X.

Demonstração. Mostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Para provar a primeira implicação, seja $a \in X'$. Existe $x_1 \in X$ tal que $0 < |x_1 - a| < 1$. Tomando $\varepsilon_2 = \min\{|x_1 - a|, 1/2\}$, vemos que existe $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < \varepsilon_2$. Seja $\varepsilon_3 = \min\{|x_2 - a|, 1/3\}$. Existe $x_3 \in X$ tal que $0 < |x_3 - a| < \varepsilon_3$. Prosseguindo desta forma, obteremos uma seqüência de elementos $x_n \in X$ com $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$ e $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Assim, os x_n são dois a dois distintos, pertencem a X e $\lim x_n = a$. As implicações (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) são óbvias.

Corolário. *Se* $X' \neq \emptyset$ *então* X *é infinito.*

Exemplos.

17. Seja $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Então $X' = \{0\}$. Mais geralmente, se $\lim x_n = a$ e $a \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, pondo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, temos $X' = \{a\}$. Se, porém, for $a \in X$, pode-se ter $X' = \{a\}$ ou $X' = \emptyset$. Por exemplo, para a seqüência $(a, a, a, \ldots)$ vale $X' = \emptyset$. Já a seqüência $\left(a, a+1, a, a+\frac{1}{2}, a, a+\frac{1}{3}, \ldots\right)$ dá $X' = \{a\}$.

18. $(a,b)' = (a,b]' = [a,b)' = [a,b]$. $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}$. $\mathbb{Z}' = \mathbb{N}' = \emptyset$.

19. Todo ponto x do conjunto de Cantor K é um ponto de acumulação de K. Suponhamos inicialmente que x seja extremidade de algum dos intervalos abertos retirados de $[0,1]$ para formar K. Por exemplo, vamos admitir que (a, x) fosse um dos intervalos omitidos. Na etapa em que se retirou (a, x) restou um intervalo $[x, b_1]$. Na etapa seguinte será omitido o terço médio aberto de $[x, b_1]$ e então sobrará um intervalo $[x, b_2]$ (e mais outro que não nos interessa). Nas etapas posteriores sobrarão $[x, b_3]$, $[x, b_4]$, etc., com $b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \ldots$ pertencentes a K e

$\lim b_n = x$. Logo $x \in K'$. E se x não pertencer ao conjunto E das extremidades dos intervalos retirados? Neste caso sabemos, pelo Exemplo 16, que todo intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contém pontos de E. Como $x \notin E$, tais pontos são diferentes de x. Logo $x \in E'$ e, portanto, $x \in K'$.

Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X chama-se um *ponto isolado* de X.

Para que $a \in X$ seja um ponto isolado é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \{a\}$.

Todo ponto $a \in \mathbb{Z}$ é um ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

Teorema 8. *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou seja, o fecho de um conjunto X é obtido acrescentando-se a X os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. É claro que $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$. Logo $X \cup X' \subset \overline{X}$. Reciprocamente, se $a \in \overline{X}$, todo intervalo aberto contendo a deve conter algum $x \in X$. Se a não pertencer a X então $x \neq a$, donde $a \in X'$. Assim $a \in \overline{X}$ implica que $a \in X$ ou $a \in X'$, isto é, $\overline{X} \subset X \cup X'$.

Corolário 1. *X é fechado se, e somente se, $X' \subset X$.*

Com efeito, dados dois conjuntos S, T, tem-se $S = S \cup T$ se, e somente se, $T \subset S$.

Corolário 2. *Se todos os pontos do conjunto X são isolados então X é enumerável.*

Com efeito, seja $E \subset X$ um conjunto enumerável denso em X. Dado qualquer $x \in X$, temos $x \in \overline{E}$ mas, como $x \notin X'$, tampouco x pode ser ponto de acumulação de E. Logo $x \in E$. Segue-se que $E = X$. Concluímos que X é enumerável.

Dizemos que a é *ponto de acumulação à direita* do conjunto X quando todo intervalo $[a, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, contém algum ponto de X *diferente* de a.

Isto equivale a dizer que todo intervalo $[a, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de X, ou então que a é ponto de acumulação de $X \cap [a, +\infty)$.

Outra afirmação equivalente a esta é dizer que a é limite de uma seqüência *decrescente* de pontos de X.

O ponto a é ponto de acumulação à direita de X se, e somente se, todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X.

Indicaremos pelo símbolo X'_+ o conjunto dos pontos de acumulação à direita de X. De modo análogo se define *ponto de acumulação à esquerda* do conjunto X: todo intervalo $(a - \varepsilon, a]$, com $\varepsilon > 0$, deve conter algum ponto de X diferente de a (e portanto uma infinidade de pontos de X). Uma condição equivalente: $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma seqüência crescente de pontos de X. O conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X será representado por X'_-. Tem-se $a \in X'_-$ se, e somente se, para todo intervalo aberto (c, a) vale $(c, a) \cap X \neq \emptyset$.

Exemplos.

20. Se $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, 0 é ponto de acumulação à direita, mas não à esquerda de X. Todo ponto de (a, b) é ponto de acumulação à direita e à esquerda para (a, b). Já o ponto a é apenas ponto de acumulação à direita e b é ponto de acumulação à esquerda.

21. Seja K o conjunto de Cantor. Se $a \in K$ é extremidade inferior de algum dos intervalos retirados, então a é apenas ponto de acumulação à esquerda para K. Do mesmo modo, se a for extremidade superior de algum intervalo omitido então a é ponto de acumulação à direita apenas. Os pontos 0 e 1, embora não sejam extremos de intervalos omitidos, são pontos de acumulação de um lado apenas, por motivos óbvios. Os demais pontos de K são pontos de acumulação de ambos os lados. (Não sabemos ainda se tais pontos existem mas, se provarmos que K não é enumerável, resultará que eles formam a maioria pois, sendo E enumerável, $K - E$ será não-enumerável. (Veja o Teorema 9.)

Teorema 9. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ não-vazio tal que $F = F'$. (Isto é, F é um conjunto fechado não-vazio sem pontos isolados.) Então F é não-enumerável.*

A demonstração se baseia no seguinte

Lema. *Seja F fechado, não-vazio, sem pontos isolados. Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe F_x limitado, fechado, não-vazio, sem pontos isolados, tal que $x \notin F_x \subset F$.*

Demonstração. Como F é infinito, existe $y \in F$, $y \neq x$. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado tal que $x \notin [a, b]$ e $y \in (a, b)$. O conjunto $G = (a, b) \cap F$ é limitado, não-vazio e nenhum dos seus pontos é isolado. Se G for fechado, poremos $F_x = G$ e o lema estará demonstrado. Caso contrário, pelo menos um dos a, b será ponto de acumulação de G. Neste caso, acrescentaremos esse(s) ponto(s) a G para obter F_x. Ou seja, em qualquer hipótese, pomos $F_x = \overline{G}$.

Demonstração do Teorema 9. Mostraremos que, dado qualquer subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset F$, podemos encontrar um ponto $y \in F$ tal que $y \neq x_n$ para todo n. Aplicando repetidamente o Lema a x_1 e F, a x_2 e F_1, etc., obtemos uma seqüência de conjuntos fechados limitados e não-vazios F_n tais que $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ e $x_n \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Escolhamos, para cada n, um ponto $y_n \in F_n$. A seqüência (y_n) é limitada, logo possui uma subseqüência convergente $y'_n \to y$. Dado arbitrariamente $k \in \mathbb{N}$, temos $y'_n \in F_k$ para todo $n \geq k$. Como F_k é fechado, segue-se que $y = \lim_n y'_n \in F_k$. Assim $y \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde concluímos: 1º) $y \in F$; 2º) $y \neq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto completa a demonstração.

Corolário 1 (Equivalente ao teorema). *Todo conjunto fechado enumerável não-vazio possui algum ponto isolado.*

Corolário 2. *O conjunto de Cantor é não-enumerável.*

4 Conjuntos compactos

Uma *cobertura* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$, tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Exemplos.

22. Os intervalos $C_1 = (0, 2/3)$, $C_2 = (1/3, 1)$ e $C_3 = (1/2, 9/10)$ constituem uma cobertura $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ do intervalo $[1/4, 3/4]$. Aqui $L = \{1, 2, 3\}$. Com efeito, $[1/4, 3/4] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$. Tomando $L' = \{1, 3\}$ temos a subfamília $\mathcal{C}' = \{C_1, C_3\}$, a qual é uma subcobertura de $\mathcal{C}$, pois ainda vale $[1/4, 3/4] \subset C_1 \cup C_3 = (0, 9/10)$.

23. Seja $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. X é um conjunto infinito e seus pontos são todos isolados (isto é, $X \cap X' = \emptyset$). Assim, para cada $x \in X$, podemos obter um intervalo aberto I_x, de centro x, tal que $I_x \cap X = \{x\}$. A família $\mathcal{C} = (I_x)_{x \in X}$ assim formada é uma cobertura de X, pois cada $x \in X$ pertence a I_x. Note-se que $\mathcal{C}$ não possui subcobertura própria: se omitirmos qualquer I_x, o ponto x fica "descoberto" pois x não pertence a I_y algum com $y \neq x$.

Teorema 10. (Borel-Lebesgue). *Seja* $[a, b]$ *um intervalo limitado e fechado. Dada uma família* $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de intervalos abertos tais que* $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$, *existe um número finito deles,* $I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}$, *tais que* $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. *Em outras palavras: toda cobertura de* $[a, b]$ *por meio de intervalos abertos admite uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ pode ser coberto por um número finito dos I_λ, isto é, $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. Temos $X \neq \emptyset$: por exemplo, $a \in X$. Seja $c = \sup X$. Evidentemente, $c \in [a, b]$. Afirmamos

porquê?

que $c \in X$. Com efeito, existe algum $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ tal que $c \in I_{\lambda_0}$. Sendo $\alpha < c$, deve existir $x \in X$ tal que $\alpha < x \leq c$. Logo $x \in I_{\lambda_0}$. Mas como $x \in X$, temos $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$ e daí $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$, o que prova que $c \in X$. Mostraremos agora que $c = b$. Se fosse $c < b$, existiria algum $c' \in I_{\lambda_0}$ com $c < c' < b$. Então $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ donde $c' \in X$, o que é absurdo, pois $c' > c$ e c é o sup de X. Vemos, portanto, que o intervalo $[a, b]$ está contido numa reunião finita dos I_λ, o que prova o teorema.

Extensão do teorema acima. Em vez de intervalos I_λ, podemos supor $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, uma cobertura de $[a, b]$ por conjuntos abertos quaisquer A_λ, e ainda existirá uma cobertura finita:

$$[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Com efeito, cada ponto $x \in [a, b]$ pertence a um aberto A_λ. Logo, para cada x em $[a, b]$ podemos escolher um intervalo aberto I_x tal que $x \in I_x \subset A_\lambda$. Isto nos fornece uma cobertura de $[a, b]$ pelos intervalos I_x, da qual extraímos uma subcobertura finita $[a, b] \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existe $\lambda_j \in L$ tal que $I_{x_j} \subset A_{\lambda_j}$: assim, $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Forma definitiva do Teorema de Borel-Lebesgue: *Seja* $F \subset \mathbb{R}$ *um conjunto limitado e fechado. Toda cobertura* $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *de* F *por meio de abertos admite uma subcobertura finita:*

$$F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Demonstração. Sendo F fechado, $A = \mathbb{R} - F$ é aberto. E sendo F limitado, existe um intervalo limitado $[a, b]$ que contém F. Temos $[a, b] \subset \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup A$. Daí se extrai uma subcobertura finita $F \subset [a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A$. Como nenhum ponto de F está em A, obtemos $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 24. A própria reta $\mathbb{R}$, sendo um conjunto fechado, mas ilimitado, possui a cobertura aberta $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, +n)$, a qual não admite subcobertura finita. Com efeito, a reunião de um número finito de intervalos $(-n, n)$ é igual ao maior deles e, portanto, não pode ser $\mathbb{R}$. Por outro lado, o intervalo $(0, 1]$, sendo um conjunto limitado, mas não fechado, possui a cobertura aberta $(0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$, da qual não se pode extrair uma subcobertura finita porque a reunião de um número finito de intervalos da forma $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$ é o maior deles e, portanto, não pode conter $(0, 1]$.

Teorema 11. *As seguintes afirmações a respeito de um conjunto* $K \subset \mathbb{R}$ *são equivalentes:*

1. K *é limitado e fechado;*
2. *toda cobertura aberta de* K *possui subcobertura finita;*
3. *todo subconjunto infinito de* K *possui ponto de acumulação pertencente a* K*;*
4. *toda seqüência de pontos de* K *possui uma subseqüência que converge para um ponto de* K.

Demonstração. A forma definitiva do Teorema de Borel-Lebesgue dá (1) $\Rightarrow$ (2). Para provar que (2) $\Rightarrow$ (3), seja $X \subset K$ um conjunto sem ponto de acumulação em K. Então, para cada $x \in K$, podemos achar um intervalo aberto I_x, de centro x, que não contém ponto algum de $X - \{x\}$. Em outras palavras, temos $I_x \cap X = \{x\}$ se $x \in X$ e $I_x \cap X = \emptyset$ se $x \notin X$. Isto nos fornece uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in X} I_x$, da qual podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Em particular, esta reunião finita contém X. Ora, para cada $x \in X$, o único intervalo

da cobertura original que continha x era o próprio I_x. Segue-se que, para cada $x \in X$, o intervalo I_x comparece na coleção $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$. Logo X é finito. Assim, quando se supõe que K cumpre a condição (2), os únicos subconjuntos de K que não possuem ponto de acumulação em K são os finitos. Segue-se que (2) $\Rightarrow$ (3).

Mostremos agora que (3) $\Rightarrow$ (4). Dada uma seqüência de pontos $x_n \in K$, há duas possibilidades: ou o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é finito ou é infinito. No primeiro caso, algum valor $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots$ deve repetir-se uma infinidade de vezes, o que nos dá uma subseqüência constante – e portanto convergente – de (x_n). No segundo caso, a hipótese (3) nos dá $a \in K$, um ponto de acumulação de X. Todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de X e, portanto, contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes. Pelo Teorema 9 do Capítulo IV, a é limite de uma subseqüência de (x_n).

Finalmente, mostremos que (4) $\Rightarrow$ (1). De fato, se K fosse ilimitado (digamos superiormente), tomaríamos $x_1 \in K$ e veríamos que existiria $x_2 \in K$ tal que $x_2 > x_1 + 1$. Prosseguindo analogamente, obteríamos uma seqüência de pontos $x_n \in K$ com $x_{n+1} > x_n + 1$. Toda subseqüência de (x_n) seria ilimitada e, portanto, não-convergente. Por outro lado, se K não fosse fechado, existiria uma seqüência de pontos $x_n \in K$ com $\lim x_n = x \notin K$. Qualquer subseqüência de (x_n) convergiria para x, portanto estaria violada a condição (4). Isto conclui a demonstração.

Corolário (Bolzano-Weierstrass). *Todo conjunto infinito limitado* $X \subset \mathbb{R}$ *possui algum ponto de acumulação.*

Observação: O Teorema 11 fornece outra demonstração do Corolário 1 do Teorema 10 do Capítulo IV, segundo o qual toda seqüência limitada possui uma subseqüência convergente.

Chama-se *compacto* a um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ que cumpre uma das (e portanto todas as) condições do Teorema 11.

Por exemplo, um intervalo $[a, b]$, o conjunto de Cantor e o

conjunto $\{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ são compactos. Todo conjunto finito é compacto. A reta $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos.

Teorema 12. *Seja* $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \ldots$ *uma seqüência descendente de compactos não-vazios. Então* $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *é não-vazio (e compacto).*

Demonstração. Em primeiro lugar, K é fechado (como interseção dos fechados K_n) e limitado porque está contido em K_1, por exemplo. Logo é compacto. Para provar que K não é vazio, escolhamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in K_n$. Todos os pontos da seqüência (x_n) assim obtida pertencem ao compacto K_1. Logo ela possui uma subseqüência convergente, $x_{n_i} \to x$. Afirmamos que $x \in K$, isto é, $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, existe $n_{i_0} > n$. Para todo $n_i \geq n_{i_0}$ temos $x_{n_i} \in K_{n_i} \subset K_{n_{i_0}} \subset K_n$. Ou seja, a partir de um certo índice n_{i_0}, todos os termos da seqüência (x_{n_i}) pertencem ao fechado K_n. Logo $x = \lim x_{n_i} \in K_n$. Isto termina a demonstração.

Apêndice ao §4. Como aplicação do Teorema de Borel-Lebesgue, demonstraremos alguns fatos sobre comprimentos de intervalos. Em seguida, usaremos tais resultados para dar alguns exemplos interessantes.

O *comprimento* do intervalo $[a,b]$ e do intervalo (a,b) é o número $b - a$.

Proposição 1. *Se* $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ *então* $b - a < \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que todos os intervalos abertos (a_i, b_i) intersectam $[a,b]$. Sejam $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ os números a_i e b_i ordenados crescentemente. É claro que nenhum intervalo (c_j, c_{j+1}) contém um ponto a_i ou um ponto b_i. Além disso, $c_1 < a$ e $b < c_k$. Logo $b - a < c_k - c_1$,

isto é:

$$b - a < (c_k - c_{k-1}) + \cdots + (c_3 - c_2) + (c_2 - c_1).$$

Mostraremos agora que cada intervalo (c_j, c_{j+1}) está contido em algum (a_i, b_i). Para isto, examinaremos as três posições possíveis do ponto c_j em relação ao intervalo $[a, b]$. Primeira: $c_j \in [a, b]$. Neste caso, $c_j \in (a_i, b_i)$ para algum i; como b_i não pode estar entre c_j e c_{j+1}, tem-se então $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$. Segunda: $c_j < a$; então c_j não pode ser um b_i porque isto faria com que (a_i, b_i) fosse disjunto de $[a, b]$. Logo tem-se $c_j = a_i$ para algum i. Como b_i não pode estar entre c_j e c_{j+1}, tem-se $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$. Terceira: $c_j > b$. Isto implica $c_{j+1} > b$ e, como há pouco, obriga que $c_{j+1} = b_i$ para algum i. Como $a_i \notin (c_j, c_{j+1})$, concluímos que $a_i \leq c_j$, donde $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$. Ora, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $a_i = c_p$ e $b_i = c_{p+q}$. Desta maneira, podemos escrever,

$$b_i - a_i = (c_{p+q} - c_{p+q-1}) + \cdots + (c_{p+1} - c_p).$$

A soma $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ pode, portanto, ser decomposta em parcelas do tipo $c_{j+1} - c_j$ de modo que todas estas parcelas (quando j assume os valores $1, 2, \ldots, k-1$) compareçam pelo menos uma vez pois, como vimos, cada intervalo (c_j, c_{j+1}) está contido em algum (a_i, b_i). Segue-se que $\Sigma(b_i - a_i) \geq \Sigma(c_{j+1} - c_j) > b - a$.

Proposição 2. *Se* $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ *então* $b - a < \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$.

Demonstração. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existem $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que

$$[a, b] \subset (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup \cdots \cup (a_{n_k}, b_{n_k}).$$

Pela Proposição 1, $b - a < (b_{n_1} - a_{n_1}) + \cdots + (b_{n_k} - a_{n_k})$. Com maior razão, $b - a < \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$.

Proposição 3. *Se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < b - a$, *então o conjunto* $X = [a,b] - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ *é não-enumerável.*

Demonstração. Seja $c = (b-a) - \Sigma(b_n - a_n) > 0$. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ fosse enumerável então tomaríamos para cada n um intervalo aberto J_n, de centro x_n e comprimento $c/2^{n+1}$. Os intervalos (a_n, b_n) e mais os J_n formariam uma coleção enumerável cuja reunião certamente conteria $[a,b]$. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos (a_n, b_n) mais os comprimentos dos J_n seria igual a $\frac{c}{2} + \Sigma(b_n - a_n)$ e, portanto, ainda inferior a $b - a$. Mas isto contradiz a Proposição 2.

Exemplos. A. *Uma coleção de intervalos abertos cujos centros incluem todos os números racionais de* $[a,b]$, *mas que não é uma cobertura de* $[a,b]$. Para obtê-la, seja $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja (a_n, b_n) o intervalo aberto de centro r_n e cujo comprimento é $\frac{b-a}{2^{n+1}}$. Então $\Sigma(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2}$, logo o intervalo $[a,b]$ não está contido na reunião dos (a_n, b_n).

B. *Um conjunto fechado não-enumerável, formado apenas por números irracionais.* Tal é o conjunto $F = [a,b] - \bigcup (a_n, b_n)$ onde os intervalos (a_n, b_n) são os do exemplo acima.

Exercícios

1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, cumpre a seguinte condição: "se uma seqüência (x_n) converge para um ponto $a \in A$ então $x_n \in A$ para todo n suficientemente grande".

2. Tem-se $\lim x_n = a$ se, e somente se, para todo aberto A contendo o ponto a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in A$.

3. Seja $B \subset \mathbb{R}$ aberto. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $x + B = \{x + y; y \in B\}$ é aberto. Analogamente, se $x \neq 0$, então o conjunto $x \cdot B = \{x \cdot y;\ y \in B\}$ é aberto.

4. Sejam A, B abertos. Então os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A, y \in B\}$ são abertos.

5. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, tem-se $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$ e $\text{int}(X \cup Y) \supset \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$. Dê um exemplo em que a inclusão não se reduza a uma igualdade.

6. Se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e $a \in A$ então $A - \{a\}$ é aberto.

7. Considere as funções $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$. Mostre que, para cada $A \subset \mathbb{R}$ aberto, $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ são abertos.

8. No exercício anterior, mostre que, para cada $A \subset \mathbb{R}$ aberto, $f(A)$ e $h(A)$ são abertos. Dê exemplo de A aberto tal que $g(A)$ não seja aberto.

9. Toda coleção de abertos não-vazios, dois a dois disjuntos é enumerável.

10. O conjunto dos valores de aderência de uma seqüência é um conjunto fechado.

11. Se $X \subset F$ e F é fechado então $\overline{X} \subset F$.

12. Se $\lim x_n = a$ e $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ então $\overline{X} = X \cup \{a\}$.

13. O número $1/4$ pertence ao conjunto de Cantor.

14. Sejam F, G conjuntos fechados disjuntos tais que $F \cup G$ seja um intervalo fechado (limitado ou não). Então $F = \emptyset$ ou $G = \emptyset$.

15. Seja $E \subset \mathbb{R}$ enumerável. Consiga uma seqüência cujo conjunto dos valores de aderência é $\overline{E}$. Use este fato para mostrar que todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$ é o conjunto dos valores de aderência de alguma seqüência.
[*Sugestão*: Escreva $\mathbb{N}$ como reunião enumerável de conjuntos infinitos disjuntos $\mathbb{N}_i$. Para cada $n \in \mathbb{N}_i$ faça $x_n =$ i-ésimo elemento do conjunto E. Para a segunda parte, use o Teorema 6.]

16. Com a notação do Exercício 4, se α é irracional, os conjuntos $F = \mathbb{Z}$ e $G = \alpha\mathbb{Z}$ são fechados porém $F + G$ não é fechado. Também $H = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é fechado mas $F \cdot H$ não é fechado.
[*Sugestão*: Exercício 58 do Capítulo III.]

17. Seja K o conjunto de Cantor. Mostre que $\{|x - y|; x \in K, y \in K\} = [0, 1]$.
[*Sugestão*: Observe que o conjunto dos $|x - y|$, com $x, y \in K$, é compacto e convença-se de que ele contém todas as frações próprias cujos denominadores são potências de 3.]

18. Dado qualquer número real $a > 0$, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no conjunto de Cantor tais que $x_1 + \cdots + x_n = a$.
[*Sugestão*: O exercício anterior.]

19. Seja K o conjunto de Cantor. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem intervalos abertos $J_1 = (a_1, b_1), \ldots, J_n = (a_n, b_n)$ tais que $K \subset J_1 \cup \cdots \cup J_n$ e $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \varepsilon$.

20. Para $X, Y \subset \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo no qual a inclusão não se reduz a uma igualdade.

21. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

22. Sejam $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ não-vazios. Dê exemplos mostrando que $\cap F_n$ pode ser vazio se os F_n são apenas fechados ou apenas limitados.

23. Um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, satisfaz a condição seguinte: "$a, b \in X, \quad a < x < b \Rightarrow x \in X$".

24. Mostre que a interseção de uma seqüência descendente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos é um intervalo ou o conjunto vazio.

25. Um conjunto é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, seu complementar tem interior vazio.

26. Se F é fechado e A é aberto então $F - A$ é fechado.

27. Dê exemplo de um aberto A tal que $A \supset \mathbb{Q}$ mas $\mathbb{R} - A$ seja não-enumerável.

28. Dê exemplo de um conjunto fechado, não-enumerável, formado apenas por números transcendentes.

29. Defina a *distância* de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ como $d(a, X) = \inf\{|x - a|;\ x \in X\}$.
Prove:

1) $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{X}$;

2) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in F$ tal que $d(a, F) = |b - a|$.

30. Se X é limitado superiormente, seu fecho $\overline{X}$ também é. Além disso, $\sup X = \sup \overline{X}$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

31. Para todo $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $\sup X$ é aderente a X. Resultado análogo para inf.

32. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é fechado.

33. Um número a é ponto de acumulação de X se, e somente se, é ponto de acumulação de $\overline{X}$.

34. $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.

35. Todo ponto de um conjunto aberto A é ponto de acumulação de A.

36. Sejam F fechado e $x \in F$. Então x é um ponto isolado de F se, e somente se, $F - \{x\}$ é ainda fechado.

37. Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que $X' \cap X = \emptyset$. Mostre que existe, para cada $x \in X$, um intervalo aberto I_x, de centro x, tal que $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$.

38. Seja $F \subset \mathbb{R}$ fechado, infinito enumerável. Mostre que F possui uma infinidade de pontos isolados.

39. Mostre que todo número real x é limite de uma seqüência de números transcendentes dois a dois distintos.

40. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ não é enumerável, então $X \cap X' \neq \emptyset$.

41. Se A e $A \cup \{a\}$ são abertos então a é ponto de acumulação de A à direita e à esquerda.

42. Dê explicitamente o significado de cada uma das seguintes afirmações. Em suas explicações, você está proibido de usar qualquer das palavras *grifadas* abaixo:

    1) $a \in X$ *não* é ponto *interior* de X;
    2) $a \in \mathbb{R}$ *não* é *aderente* a X;
    3) $X \subset \mathbb{R}$ *não* é um conjunto *aberto*;
    4) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}$ *não* é *fechado*;
    5) $a \in \mathbb{R}$ *não* é *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$;
    6) $X' = \emptyset$;
    7) $X \subset Y$ mas X *não* é *denso* em Y;
    8) $\text{int}(\overline{X}) = \emptyset$;
    9) $X \cap X' = \emptyset$;
    10) X *não* é *compacto*.

43. Se todo ponto de acumulação de X é unilateral, X é enumerável.

44. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Toda cobertura de X por meio de abertos possui uma subcobertura enumerável (Teorema de Lindelöf).

45. Com a notação do Exercício 4, prove:

    a) Se A é compacto e B é fechado então $A + B$ é fechado;

    b) se A e B são compactos, então $A + B$ e $A \cdot B$ são compactos;

    c) se A é fechado e B é compacto, $A \cdot B$ pode não ser fechado.

46. Obtenha coberturas abertas de $\mathbb{Q}$ e de $[0,+\infty)$ que não admitam subcoberturas finitas.

47. Considere as funções f, g, h do Exercício 7. Mostre que para K e L compactos arbitrários, $f(K)$, $g(K)$, $h(K)$, $f^{-1}(L)$, $g^{-1}(L)$ e $h^{-1}(L)$ são compactos.

48. As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) X é limitado;

(2) Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação (que pode não pertencer a X);

(3) Toda seqüência de pontos de X possui uma subseqüência convergente.

49. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto cujos pontos, com exceção de $a = \inf X$ e $b = \sup X$, são pontos de acumulação à direita e à esquerda. Então $X = [a,b]$ ou $X = \{a,b\}$.

50. Se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de compactos, então $\cap K_\lambda$ é compacto. Se $K_1, \ldots, K_n$ são compactos então $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ é compacto. Se K é compacto e F é fechado, então $K \cap F$ é compacto.

51. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *não-decrescente* no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x \leq a \leq y < a + \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$. (Bem entendido: $x, y \in X$.) Mostre que se f é não-decrescente em todos os pontos de um intervalo $[a,b]$ então f é não-decrescente em $[a,b]$ (isto é, $x, y \in [a,b]$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$).

52. Seja $[a,b] \subset \cup A_\lambda$ onde cada A_λ é aberto. Mostre que é possível decompor $[a,b]$ em um número finito de intervalos justapostos de modo que cada um deles esteja contido em algum A_λ.

53. No exercício anterior, mostre que os intervalos nos quais se decompôs $[a, b]$ podem ser tomados com o mesmo comprimento.

54. (Teorema de Baire). Se $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio então $S = F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup \ldots$ tem interior vazio. (É preciso mostrar que, dado arbitrariamente um intervalo aberto I, existe algum $x \in I \cap (\mathbb{R} - S)$. Imite a demonstração do Teorema 6, Capítulo III, onde se tem pontos em vez dos fechados F_n.)

55. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais não pode ser expresso como reunião enumerável de fechados. Analogamente, $\mathbb{Q}$ não é interseção de uma família enumerável de abertos.

56. Se $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, então $b - a \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Também $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ implica $b - a \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$. Finalmente, resultados análogos valem para (a, b) em vez de $[a, b]$.

57. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ chama-se *localmente limitada* quando para cada $x \in X$ existe um intervalo aberto I_x, contendo x, tal que $f|I_x \cap X$ é limitada. Mostre que se X é compacto, toda função $f: X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é limitada.

58. Dado $X \subset \mathbb{R}$ não-compacto, defina uma função $f: X \to \mathbb{R}$ que seja localmente limitada mas não seja limitada.

59. Sejam C compacto, A aberto e $C \subset A$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in C$, $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.

60. Dada uma seqüência (x_n) seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n$ é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

61. Uma família de conjuntos $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ chama-se uma *cadeia* quando, para quaisquer $\lambda, \mu \in L$ tem-se $K_\lambda \subset K_\mu$ ou $K_\mu \subset K_\lambda$. Prove que se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cadeia de compactos não-vazios então a interseção $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ é não-vazia (e compacta).

62. Se $X \subset \mathbb{R}$ é não-enumerável, então X' também o é.

63. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, $\overline{X} - X'$ é enumerável.

64. Um número real a chama-se *ponto de condensação* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade não-enumerável de pontos de X. Seja F_0 o conjunto dos pontos de condensação de um fechado $F \subset \mathbb{R}$. Prove que F_0 é um conjunto *perfeito* (isto é, fechado, sem pontos isolados) e que $F - F_0$ é enumerável. Conclua daí o *Teorema de Bendixson*: todo fechado da reta é reunião de um conjunto perfeito com um conjunto enumerável.

Capítulo VI

Limites de Funções

Retomaremos agora a noção de limite sob uma forma mais geral. Em vez de seqüências, como no Capítulo IV, consideraremos funções reais $f: X \to \mathbb{R}$, definidas em subconjuntos arbitrários $X \subset \mathbb{R}$.

É bem verdade que a maioria das funções de uma variável encontradas em Análise são definidas em intervalos ou em reuniões finitas de intervalos. Nossa justificativa, por ter considerado maior generalidade, é dupla: em primeiro lugar, o esforço adicional é ínfimo e compensado por uma visão mais ampla; em segundo lugar, o leitor deverá encontrar em seus estudos posteriores (funções de várias variáveis, integral de Lebesgue, cálculo das variações, análise funcional, etc.) funções definidas em domínios muito mais complicados do que intervalos da reta. Assim, é bom que vá ganhando mais experiência com situações gerais.

Neste capítulo, como em todo o livro, não hesitamos em utilizar exemplos envolvendo funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Assim procedendo, estamos nos afastando da linha axiomática que tínhamos prometido seguir, pois somente nos capítulos finais é que indicaremos como desenvolver rigorosamente a teoria dessas funções. Nossa atitude se baseia no fato de que nossos leitores já estudaram Cálculo e portanto conhecem senos, cossenos e logaritmos. Além disso, tais exemplos, embora

constituam um precioso instrumento para fixar a aprendizagem, não interferem jamais no encadeamento lógico dos assuntos aqui expostos.

1 Definição e propriedades do limite

Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. (Diz-se neste caso que f é uma função real de uma variável real). Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X, isto é, $a \in X'$.

Diremos que o número real L é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, e escreveremos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

para significar o seguinte: para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto, quando a é ponto de acumulação do domínio de f, a expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$ é uma abreviatura para a afirmação abaixo:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Note-se que $0 < |x - a| < \delta$ quer dizer que x pertence ao intervalo $(a - \delta,\ a + \delta)$ e é diferente de a. Assim, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que, para todo intervalo aberto $(L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$, existe um intervalo aberto $(a - \delta,\ a + \delta)$ tal que, pondo-se $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta,\ a + \delta)$, vale $f(V_\delta) \subset (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$.

Observe que $V_\delta = \{x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta\}$. Uma notação mais completa (e bem mais "carregada") seria $V_X(a;\delta)$.

Em linguagem mais simples: é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de a (e diferente de a!).

Observações: 1. De acordo com a definição dada, só tem sentido escrever $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quando a é ponto de acumulação de

domínio X da função f. Se quiséssemos considerar a mesma definição no caso em que $a \notin X'$ então *todo* número real L seria limite de f(x) quando x tende para a! Com efeito, sendo $a \notin X'$, existe $\delta > 0$, tal que $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) = \emptyset$ (isto é, $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, não se verifica para x algum). Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, escolheríamos este δ. Seria sempre verdade que $\emptyset = f(V_\delta) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, seja qual fosse L. Logo teríamos $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

2. Ao considerarmos o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, não exigimos que a pertença ao domínio da função f. Nos casos mais interessantes de limite, tem-se $a \notin X$.

3. Mesmo que se tenha $a \in X$, a afirmação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nada diz a respeito do valor f(a). Ela descreve apenas o comportamento dos valores f(x) para x próximo de a, com $x \neq a$. Explicitamente, é possível ter-se $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Veja o Exemplo 4 adiante, ou então considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 1$ para todo $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. É imediato que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

4. Quando nos referimos à função f, fica implícito que ela tem um domínio bem especificado, a saber: o conjunto X. Em outras palavras, dar f implica em dar X. Assim, ao escrevermos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, está subentendido que x varia em X. Às vezes, entretanto, pode haver perigo de ambigüidade. Nestes casos, poderemos usar a notação pleonástica $\lim_{x \to a,\, x \in X} f(x) = L$.

5. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então o ponto L é aderente ao conjunto $f(X - \{a\})$, pois cada intervalo aberto de centro L contém pontos deste conjunto. Mais ainda (e pelo mesmo motivo): para cada $\delta > 0$, pondo $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos $L \in \overline{f(V_\delta)}$.

Os teoremas abaixo estabelecem as principais propriedades do limite de uma função.

Teorema 1. (Unicidade do limite). *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$.

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon>0$, existem $\delta_1>0$ e $\delta_2>0$, tais que para $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Seja $\delta \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como $a \in X'$, podemos obter $\overline{x} \in X$, tal que $0 < |\overline{x} - a| < \delta$. Então $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. isto nos dá $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, logo $L_1 = L_2$.

Teorema 2. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Dado* $Y \subset X$ *tal que* $a \in Y'$, *ponhamos* $g = f|Y$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$. *Se* $Y = I \cap X$ *onde* I *é um intervalo aberto contendo* a, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$.

Demonstração. Evidente.

Observação: A primeira parte do Teorema 2 é análoga à afirmação de que toda subseqüência de uma seqüência convergente é ainda convergente e possui o mesmo limite. A segunda parte afirma que a existência e o valor $\lim_{x\to a} f(x)$ dependem apenas do comportamento de f numa vizinhança de a.

Teorema 3. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *então* f *é limitada numa vizinhança de* a, *isto é, existem* $A > 0$, $\delta > 0$ *tais que* $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x)| < A$.

Demonstração. Seja $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |L| + 1$. Tomemos este δ e ponhamos $A = |L| + 1$.

Teorema 4. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}, f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Se, para todo* $x \in X$, $x \neq a$, *for* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *e, além disso, tivermos* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$. Seja

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$, donde $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Teorema 5. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f, g \colon X \to \mathbb{R}$. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$ *com* $L < M$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon = \dfrac{M - L}{2} > 0$. Então $L + \varepsilon = \dfrac{L + M}{2} = M - \varepsilon$. Existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $g(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$, donde $f(x) < \dfrac{L + M}{2} < g(x)$.

Corolário 1. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.

Corolário 2. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X$, $x \neq a$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ *então* $L \leq M$.

Teorema 6. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. *Para que* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *é necessário e suficiente que se tenha* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ *para toda seqüência de pontos* $x_n \in X - \{a\}$, *tal que* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, com $x_n \in X - \{a\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$, donde $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que não se tenha $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_n \in X$ com $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Então $x_n \to a$, mas não se tem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Corolário 1. *Para que exista* $\lim_{x \to a} f(x)$ *é necessário que exista* $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ *e independa da seqüência de números* $x_n \in X - \{a\}$ *com* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Corolário 2. *Para que exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *é suficiente que exista* $\lim f(x_n)$ *para toda seqüência de números* $x_n \in X - \{a\}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Com efeito, se tal limite existe para toda seqüência dessa natureza, então $\lim f(x_n)$ não dependerá de seqüência (x_n), pois se fosse $\lim f(x_n) = L$ e $\lim f(y_n) = M$, com $x_n, y_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = a$ e $L \neq M$, formaríamos a seqüência (z_n) com $z_{2k} = x_k$, $z_{2k-1} = y_k$ e teríamos $z_n \in X - \{a\}$, $z_n \to a$ mas $(f(z_n))$ não convergiria.

Teorema 7. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então* $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ *e* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$. *Se* $M \neq 0$ *então* $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = L/M$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e existe uma constante* A *tal que* $|g(x)| \leq A$ *para todo* $x \in X - \{a\}$ *então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = 0$, *mesmo que não exista* $\lim_{x\to a} g(x)$.

Demonstração. Usar as propriedades análogas, demonstradas no Capítulo IV para limites de seqüências, e aplicar o Teorema 6. Note que, para o limite do quociente, deve-se empregar o Teorema 5 a fim de saber que $f(x)/g(x)$ tem sentido para todo x suficientemente próximo (e diferente) de a. Como exemplo, vejamos o limite do produto. Para toda seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, temos $\lim[f(x_n)\cdot g(x_n)] = \lim f(x_n)\cdot \lim g(x_n) = L\cdot M$. Logo $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$.

Observação: Como no caso de seqüências, observamos que, se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ só pode ter limite (quando $x \to a$) se for também $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, pois $f(x) = g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}$. Caso se tenha $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ mas não valha $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, o quociente $f(x)/g(x)$ não pode sequer ser limitado na vizinhança de a.

Teorema 8. (Critério de Cauchy para funções). *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f: X \to \mathbb{R}$. *Para que exista* $\lim_{x \to a} f(x)$ *é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente* $\varepsilon > 0$, *se possa obter* $\delta > 0$, *tal que* $x, y \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ *impliquem* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demonstração. Se existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$, tal que $x, y \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$, $|f(y) - L| < \varepsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \varepsilon$. Reciprocamente, se esta condição é satisfeita, então, dada uma seqüência arbitrária de números reais $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, a seqüência $(f(x_n))$ é de Cauchy. [Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ fornecido pela condição admitida. Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_m - a| < \delta$ e $0 < |x_n - a| < \delta$ e, portanto, $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$.] Logo $(f(x_n))$ é convergente. Pelo Corolário 2 do Teorema 6, existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Vejamos agora o que ocorre com o limite de uma função composta.

A situação que temos em mente é a seguinte: $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(y) = c$.

Para que tenha sentido falar em $g(f(x))$, $x \in X$, supomos que $f(X) \subset Y$. Gostaríamos de poder concluir, nestas condições, que

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c.$$

Com efeito, a é ponto de acumulação do domínio da função $g \circ f: X \to \mathbb{R}$. Logo, tem sentido considerar $\lim_{x \to a} g(f(x))$. Além disso, como $g(y)$ tende para c quando y tende para b, é plausível imaginar que isto ocorre, em particular, para y da forma $y = f(x)$. Há, entretanto, uma dificuldade: para que $g(y)$ se aproxime de c é necessário que y fique próximo de b, mas sempre seja $y \neq b$! E nada garante que $f(x) \neq b$.

Vejamos um exemplo simples: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identicamente nula, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = 1$ se $x \neq 0$,

$g(0) = 0$. Então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(x) = 1$, mas $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0$ (e não 1).

Pode ocorrer ainda que, quando $x \to a$, $f(x)$ assuma infinitas vezes o valor b para valores de x diferentes. Neste caso, se $\lim_{y\to b} g(y)$ for diferente de $g(b)$, então não existirá $\lim_{x\to a} g(f(x))$ embora existam $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$.

Por exemplo, sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas assim: $f(x) = 0$ se x é irracional, e $f(x) = x$ se x é racional; $g(y) = 0$ se $y \neq 0$ e $g(0) = 1$. Então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, mas não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$, pois, se x é racional e diferente de zero, temos $g(f(x)) = 0$ enquanto $x \neq 0$ irracional dá $g(f(x)) = 1$.

Exposta a dificuldade, a solução é simples. Basta impor que $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$. Temos o

Teorema 9. *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ *com* $f(X) \subset Y$. *Sejam* $a \in X'$ *e* $b \in Y' \cap Y$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *e* $\lim_{y\to b} g(y) = c$ *tem-se* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, *desde que seja* $c = g(b)$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon$. (Não requeremos que seja $y \neq b$, porque $g(b) = c$ fornece automaticamente $|g(b) - c| < \varepsilon$.) A partir de η, obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \eta$. Então, $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon$, o que dá o resultado procurado.

2 Exemplos de limites

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação identidade, isto é, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então é evidente que $\lim_{x\to a} f(x) = a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. O Teorema 7 nos dá $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot f(x)] = a^2$, ou seja, $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$. O mesmo teorema, aplicado $n - 1$ vezes, nos fornece $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se daí (com

auxílio das outras partes do teorema) que, para todo polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, tem-se $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$, seja qual for $a \in \mathbb{R}$. Também para toda função racional $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, quociente de dois polinômios, tem-se $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, desde que o denominador não se anule no ponto a, isto é, $q(a)\neq 0$. Quando $q(a) = 0$, então o polinômio $q(x)$ é divisível por $(x-a)$. Escrevamos então $g(x) = (x-a)^m q_1(x)$, onde $q_1(a) \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Ponhamos também $p(x) = (x-a)^n \cdot p_1(x)$, com $p_1(a) \neq 0$. Se for $m = n$, então $\lim_{x\to a} f(x) = p_1(a)/q_1(a)$, porque $f(x) = p_1(x)/q_1(x)$ para todo $x \neq a$. Se for $n > m$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, pois $f(x) = (x-a)^{n-m} \cdot [p_1(x)/q_1(x)]$ para todo $x \neq 0$. Finalmente, se $n < m$, então $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe, pois $f(x) = p_1(x)/[(x-a)^{m-n} \cdot q_1(x)]$, onde o denominador tem limite zero e o numerador não. (Veja a observação seguinte ao Teorema 7.)

2. Sejam $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ e $h\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \dfrac{c \cdot x}{x}$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Tem-se $f(x) = c$ para todo $x \neq 0$ e $g(x) = x + 1$ para todo $x \neq 1$. Logo $\lim_{x\to 0} f(x) = c$ e $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$. (Note-se que $f(0)$ e $g(1)$ não estão definidos.) Por outro lado, não existe $\lim_{x\to 0} h(x)$, pois h é o quociente de duas funções, das quais o denominador tem limite zero e o numerador tem limite 1. (Veja a observação em seguida ao Teorema 7.)

3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é racional e $f(x) = 1$ se x é irracional. Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, não existe $\lim_{x\to a} f(x)$, em virtude do Teorema 6: fazendo x_n tender para a por valores racionais teremos $f(x_n) = 0$, logo $f(x_n) \to 0$. Mas fazendo $x_n \to a$, por valores irracionais teremos $f(x_n) = 1$. Se pusermos $g(x) = (x-a)f(x)$, teremos $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

4. Seja $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ se p/q é uma fração irredutível com $q > 0$, e $f(0) = 1$. Para todo número real a, temos $a \in \mathbb{Q}'$, logo tem sentido falar em $\lim_{x\to a} f(x)$. Afirmamos que este limite é zero, seja qual for $a \in \mathbb{R}$. Devemos então provar o seguinte: fixado $a \in \mathbb{R}$ e dado $\varepsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que $0 < \left|\frac{p}{q} - a\right| < \delta \Rightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ora, o conjunto $F = \{q \in \mathbb{N};\ q \leq 1/\varepsilon\}$ é finito. Para cada $q \in F$ fixado, as frações m/q, $m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta em intervalos justapostos de comprimento $1/q$. Seja $m_q \in \mathbb{Z}$ o maior inteiro tal que $m_q/q < a$. Como F é finito, existe m/q', a maior das frações m_q/q, para todo $q \in F$. Assim, m/q' é a maior fração que tem denominador em F e é menor do que a. Analogamente, existe $\frac{n}{q''}$, a menor fração com denominador em F, tal que $a < \frac{n}{q''}$. Salvo possivelmente a, nenhum número racional do intervalo $\left(\frac{m}{q'}, \frac{n}{q''}\right)$ pode ter denominador em F. Assim, se escrevermos $\delta = \min\left\{a - \frac{m}{q'}, \frac{n}{q''} - a\right\}$, veremos que $0 < \left|\frac{p}{q} - a\right| < \delta \Rightarrow q \notin F \Rightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$, como queríamos provar.

5. Seja $f\colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$. (Isto significa: $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$.) Então $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe pois $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ e $\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.

6. Um dos exemplos mais populares de uma função sem limite é dado por $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Tomando-se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, temos $x_n \to 0$ e $\lim f(x_n) = 0$. Por outro lado, para $x_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}$, vale $x_n \to 0$ e $\lim f(x_n) = 1$. Na realidade,

para todo número $c \in [-1, +1]$, podemos obter uma seqüência de pontos $x_n \neq 0$, com $x_n \to 0$ e $f(x_n) = c$ para todo n. Basta tomar um número b tal que $\operatorname{sen} b = c$ e por $x_n = (b + 2\pi n)^{-1}$. Assim não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$. Mas esta função é limitada. Logo vale $\lim_{x \to 0} g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ para toda função $g \colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{x \to 0} x^n \cdot \operatorname{sen}(1/x) = 0$.

3 Limites laterais

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Lembramos que a notação X'_+ representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita de X. Tem-se $a \in X'_+$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ vale $X \cap (a, a + \delta) \neq \emptyset$. Por exemplo, 0 é ponto de acumulação à direita de $[0, 1]$.

Consideremos portanto, a, ponto de acumulação à direita do domínio da função $f \colon X \to \mathbb{R}$.

Diremos que o número real L é o *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a, e escreveremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Assim, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ é uma abreviatura para a seguinte afirmação:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0; \ x \in X, \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja, tem-se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a, a+\delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

De modo análogo se define o *limite à esquerda*. Se a é um ponto de acumulação à esquerda ($a \in X'_-$) do domínio da função

$f\colon X \to \mathbb{R}$, diremos que o limite à esquerda de $f(x)$, quando x tende para a, é o número L, e escreveremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

para exprimir que a todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se fazer corresponder um $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja, $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

A demonstração do teorema abaixo é imediata.

Teorema 10. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. *Ponhamos* $Y = X \cap (a, +\infty)$ *e* $g = f|Y$. *Então* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x \to a} g(x) = L$. *Um resultado análogo vale para o limite à esquerda.*

Portanto o limite à direita (bem como o limite à esquerda) recai no limite ordinário de uma restrição de f.

Uma conseqüência direta do Teorema 10 é que valem para os limites laterais (à direita e à esquerda) os resultados expressos pelos Teoremas 1 a 9, com as devidas adaptações. Essas adaptações consistem simplesmente em substituir nos enunciados, $(a - \delta, a + \delta)$ por $(a, a + \delta)$ e $|x - a|$ por $x - a$ no caso de limite à direita. Nos limites à esquerda, tomar $(a - \delta, a)$ em vez de $(a - \delta, a + \delta)$ e $a - x$ em vez de $|x - a|$.

Teorema 11. *Seja* $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X'_+ \cap X'_-$. *Então existe* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Demonstração. Se existe o limite ordinário, existem os laterais e coincidem com o primeiro, em virtude dos Teoremas 2 e 10. Reciprocamente, se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X \cap (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ e $x \in X \cap (a - \delta_2, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Logo $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemplos.

7. Para a função $f\colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$, temos os limites laterais $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$, pois f coincide com $x+1$ em $(0, +\infty)$ e com $x-1$ em $(-\infty, 0)$. Já a função $g\colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ não possui limite lateral à esquerda nem à direita no ponto 0.

8. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-1/x}$. Então $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$ mas $\lim_{x\to 0-} f(x)$ não existe porque $f(x)$ não é limitada para x negativo perto de zero.

Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ (onde $X \subset \mathbb{R}$) chama-se *crescente* quando $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Se $x < y$ (com $x, y \in X$) implica apenas $f(x) \leq f(y)$, f chama-se *não-decrescente*. De modo análogo se define função *decrescente* e função *não-crescente*. Uma função de qualquer destes tipos chama-se *monótona*.

O resultado abaixo é o fato mais importante a respeito de limites laterais.

Teorema 12. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Existem os limites laterais*

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad e \quad M = \lim_{x\to b^-} f(x).$$

Demonstração. Para fixar as idéias, suponhamos f não-decrescente. Seja $L = \inf\{f(x);\, x \in X,\ x > a\}$. Afirmamos que $L = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{f(x);\, x \in X,\ x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a+\delta \in X$ e $L \leq f(a+\delta) < L+\varepsilon$. Como f é não-decrescente, se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$ então $L \leq f(x) < L+\varepsilon$, o que prova a afirmação feita. Pondo $M = \sup\{f(x);\, x \in X,\ x < b\}$, verificaríamos de modo análogo que $M = \lim_{x\to b^-} f(x)$.

Observações: 1. Uma seqüência monótona limitada é sempre convergente, enquanto que pode não existir o limite ordinário de uma função monótona limitada. (Veja $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ no ponto 0.) A explicação é que o limite de uma seqüência é sempre um limite lateral (à esquerda, pois tem-se $n \to \infty$ com $n < \infty$).

2. Se $a \in X$ então é desnecessário supor f limitada; se f é não-decrescente, por exemplo, então $f(a)$ é uma cota inferior para $\{f(x);\ x > a\}$ e uma cota superior para $\{f(x);\ x < a\}$.

4 Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas

Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz a seguinte condição:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A > 0;\ x \in X,\ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

De maneira análoga define-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o domínio de f é ilimitado inferiormente: para todo $\varepsilon > 0$ deve existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Valem os resultados já demonstrados para o limite quando $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$, com as adaptações evidentes.

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são, de certo modo, limites laterais (o primeiro é um limite à esquerda e o segundo à direita). Logo vale o resultado do Teorema 12: se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é monótona limitada então existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (se o domínio X for ilimitado superiormente) e existe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ se o domínio de f for ilimitado inferiormente.

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite no infinito: trata-se de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Exemplo 9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Por outro lado, não existe $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ nem $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$. Vale $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ mas não existe $\lim_{x\to+\infty} e^x$, no sentido da definição acima. Como fizemos no caso de seqüências, introduziremos "limites infinitos" para englobar situações como estas.

Em primeiro lugar, sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) > A$.

Por exemplo, $\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$, pois, dado $A > 0$, tomamos $\delta = 1/\sqrt{A}$. Então $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < (x-a)^2 < 1/A \Rightarrow \frac{1}{(x-a)^2} > A$.

De modo semelhante, definiremos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Isto significa que, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$. Por exemplo, $\lim_{x\to a} \frac{-1}{(x-a)^2} = -\infty$.

Evidentemente, as definições de $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, etc. não apresentam maiores dificuldades e são deixadas a cargo do leitor. Também omitiremos as definições de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, etc. Por exemplo,

$$\lim_{x\to a^+} \left(\frac{1}{x-a}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to a^-} \left(\frac{1}{x-a}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Deve-se observar enfaticamente que $+\infty$ e $-\infty$ não *são números reais*, de modo que as afirmações $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ não exprimem limites no sentido estrito do termo. Examinaremos agora, de modo sucinto, as modificações que

devem sofrer os teoremas acima demonstrados para que continuem válidos no caso de limite infinito:

1. Unicidade do limite. É claro que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então não se pode ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, pois f será ilimitada numa vizinhança de a. Tampouco pode-se ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ pois f será positiva numa vizinhança de a.

2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então, para todo $Y \subset X$ com $a \in Y'$, pondo-se $g = f|Y$, ainda $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Se $Y = X \cap (a-\delta, a+\delta)$ então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

3. Evidentemente, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então f não é limitada em vizinhança alguma de a.

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

6. Para que se tenha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ é necessário e suficiente que seja $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ sempre que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$.

7. Os enunciados sobre $\lim(f + g)$, $\lim(f \cdot g)$ e $\lim\left(\frac{f}{g}\right)$ são análogos aos do Teorema 14, Capítulo IV, sobre limites infinitos de seqüências.

8. Não há nada semelhante ao critério de Cauchy para limites infinitos.

9. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = L$ (ou $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$) então $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$ (ou $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = +\infty$).

10. Quando admitimos limites infinitos então existem sempre os limites laterais de uma função monótona $f: X \to \mathbb{R}$ em todos

os pontos $a \in X'$. (Ou mesmo quando $x \to \pm\infty$.) Tem-se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para algum $\delta > 0$, f é limitada no conjunto $X \cap (a, a+\delta)$. No caso contrário (isto é, se f é ilimitada – digamos superiormente – em $X \cap (a, a+\delta)$ para todo $\delta > 0$) então $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Diremos agora algumas palavras sobre "expressões indeterminadas". Costuma-se dizer que as expressões $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0, 1^∞ são indeterminadas. Que significa isto?

Vejamos, por exemplo, $\frac{0}{0}$. Evidentemente esta expressão não tem sentido aritmético pois a divisão por zero não está definida. Dizer que $\frac{0}{0}$ é indeterminada tem o seguinte significado preciso:

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}$, se tenha ainda $a \in Y'$. Então $\frac{f(x)}{g(x)}$ está definida no conjunto Y, e faz sentido indagar se existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Pois bem; nada se pode dizer, em geral, sobre este limite. Dependendo das funções f, g, ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Por exemplo, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, tomando $f(x) = cx$ e $g(x) = x$, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

Por outro lado, se tomarmos $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ e $g(x) = x$, teremos $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$, mas não existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Pelo mesmo motivo, $\infty - \infty$ é indeterminado. Isto quer dizer: podemos achar funções $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, enquanto $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$, dependendo das nossas escolhas para f e g, pode ter um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ ou

pode não existir. Por exemplo, se $f, g: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = c + \dfrac{1}{(x-a)^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = c$. Analogamente, se $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{(x-a)^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$, não existe $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$.

Mais um exemplo: dado qualquer número real $c > 0$ podemos achar funções $f, g: X \to \mathbb{R}$, com $a \in X'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, enquanto $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, definir $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{\log c}{\log x}$. Neste caso, vale $f(x)^{g(x)} = c$ para todo $x \neq 0$. (Tome logaritmos de ambos os membros.) Portanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = c$. Ainda neste caso, podemos escolher f e g de modo que o limite de $f(x)^{g(x)}$ não exista. Basta tomar, digamos, $f(x) = x$ e $g(x) = \log\left(1 + \left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right|\right) \cdot (\log x)^{-1}$. Então $f(x)^{g(x)} = 1 + \left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right|$ e, portanto, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$.

Estes exemplos devem bastar para que se entenda o significado da expressão "expressão indeterminada". O instrumento mais eficaz para o cálculo do limite de expressões indeterminadas é a chamada "Regra de L'Hôpital", que é objeto de infindáveis exercícios nos cursos de Cálculo.

Encerraremos estas considerações lembrando que os limites mais interessantes da Análise não podem ser calculados diretamente a partir de teoremas gerais do tipo do Teorema 7, isto é, provêm de expressões indeterminadas. Por exemplo, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ se origina de uma indeterminação do tipo 1^∞. Outro exemplo: a derivada $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ vem de uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

5 Valores de aderência de uma função; lim sup e lim inf

Em todo este parágrafo, salvo menção em contrário, consideraremos um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f: X \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação $a \in X'$.

Para todo $\delta > 0$, indicaremos com a notação V_δ o conjunto

$$\{x \in X;\ 0 < |x - a| < \delta\} = (X - \{a\}) \cap (a - \delta,\ a + \delta).$$

Diremos que f é *limitada numa vizinhança de* a quando existir algum $\delta > 0$, tal que $f|V_\delta$ seja limitada. (Ou seja, tem-se $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in V_\delta$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante conveniente.)

Um número real c chama-se um *valor de aderência* de f no ponto a quando existe uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

O Teorema 6 assegura que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então L é o único valor de aderência de f no ponto a. Mostraremos que a recíproca é verdadeira quando f é limitada numa vizinhança de a. Sem esta hipótese de limitação, pode ocorrer que $L \in \mathbb{R}$ seja o único valor de aderência de f no ponto a sem que valha $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Por exemplo, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se x é irracional. Então 1 é o único valor de aderência de f no ponto 0 mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Teorema 13. *Um número real* c *é valor de aderência de* f *no ponto* a *se, e somente se, para todo* $\delta > 0$ *tem-se* $c \in \overline{f(V_\delta)}$.

Demonstração. Se c é valor de aderência de f no ponto a, então $c = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $x_n \in X - \{a\}$, $x_n \to a$. Dado qualquer $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_\delta$. Ora, tem-se $c = \lim\limits_{n > n_0} f(x_n)$. Logo c é limite de uma seqüência de pontos pertencentes a $f(V_\delta)$, isto é, $c \in \overline{f(V_\delta)}$. Reciprocamente,

se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, para todo $\delta > 0$, então $c \in \overline{f(V_{1/n})}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_{1/n}$ tal que $|f(x_n) - c| < 1/n$. Segue-se que $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = c$. Logo c é um valor de aderência de f no ponto a.

Indiquemos com $VA(f; a)$ o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a. O corolário abaixo é, na realidade, uma forma equivalente de enunciar o Teorema 13.

Corolário 1. $VA(f; a) = \bigcap_{\delta>0} \overline{f(V_\delta)}$.

Corolário 2. $VA(f; a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(V_{1/n})}$.

Com efeito, se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, para cada $\delta > 0$, então, em particular, $c \in \overline{f(V_{1/n})}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo vale a inclusão $VA(f; a) \subset \bigcap \overline{f(V_{1/n})}$. Reciprocamente, se $c \in \overline{f(V_{1/n})}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então, dado arbitrariamente $\delta > 0$, achamos n, tal que $1/n < \delta$. Então $c \in \overline{f(V_{1/n})} \subset \overline{f(V_\delta)}$. Logo $c \in \overline{f(V_\delta)}$ para cada $\delta > 0$, ou seja $c \in VA(f; a)$. Isto demonstra o Corolário 2.

Corolário 3. *O conjuntos dos valores de aderência de* f *é fechado. Se* f *é limitada numa vizinhança de* a *então esse conjunto é compacto e não-vazio.*

Com efeito, $VA(f; a)$ é sempre fechado, como interseção de fechados. Escrevamos $K_n = \overline{f(V_{1/n})}$. Se f é limitada numa vizinhança de a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $f(V_{1/n_0})$ é limitado e, portanto, seu fecho K_{n_0} é compacto. Ora, é claro que $VA(f; a) = \bigcap_{n \geq n_0} K_n$, logo $VA(f; a)$ é compacto e não-vazio, em virtude do Teorema 12, Capítulo V.

Exemplo 10. Se f for ilimitada em qualquer vizinhança de a (isto é, se $f(V_\delta)$ for um conjunto ilimitado de números reais para todo $\delta > 0$) então $VA(f; a)$ pode não ser compacto. Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{x}$. Então todo número real é valor de aderência de f no ponto 0,

isto é, $VA(f; 0) = \mathbb{R}$. (Convença-se disto traçando o gráfico de f.) Também pode ocorrer que $VA(f; a)$ seja vazio quando f não é limitada em vizinhança alguma de a. Tal é o caso com $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Tem-se $VA(f; 0) = \emptyset$.

Seja f limitada numa vizinhança de a. Pelo Corolário 3 acima, o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é compacto e não-vazio. Logo possui um maior elemento e um menor elemento.

Chamaremos *limite superior* de f no ponto a ao maior valor de aderência de f no ponto a. Escreveremos

$$\limsup_{x \to a} f(x) = L$$

para exprimir que L é o limite superior de f no ponto a.

Analogamente, se l é o menor valor de aderência de f no ponto a, diremos que l é o *limite inferior* de f no ponto a e escreveremos

$$\liminf_{x \to a} f(x) = l.$$

O limite superior e o limite inferior de f no ponto a existem apenas quando f é limitada numa vizinhança de a. Às vezes se escreve $\limsup_{x \to a} f(x) = +\infty$ para indicar que f é ilimitada superiormente numa vizinhança de a. (Quando for $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, ter-se-á também $\liminf_{x \to a} f(x) = +\infty$.) Mas convenções desta natureza devem ser empregadas com extrema cautela porque, nesses casos, o lim sup não é um valor de aderência. Continuaremos falando em lim sup e lim inf apenas quando f for limitada numa vizinhança de a.

Por outro lado, consideraremos também valores de aderência de f quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. As definições são análogas. Por exemplo, $c \in VA(f; +\infty)$ significa que $c = \lim f(x_n)$, onde $x_n \in X$, $x_n \to +\infty$. Os fatos já provados e a provar sobre $VA(f; a)$ se estendem aos valores de aderência no infinito com adaptações evidentes. Neste caso, diz-se que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$ (por exemplo) quando existem $A > 0$ e $k > 0$, tais que $x \in X$, $x > A \Rightarrow |f(x)| \leq k$.

Exemplo 11. Seja $f\colon \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Então o conjunto dos valores de aderência de f no ponto 0 é o intervalo $[-1, +1]$. (Veja o Exemplo 6 acima.) Logo $\limsup_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ e $\liminf_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$.

Seja f limitada numa vizinhança de a. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(V_{\delta_0})$ é um conjunto limitado. Com maior razão, para todo $\delta \in (0, \delta_0]$, $f(V_\delta)$ é limitado. Definamos no intervalo $(0, \delta_0]$ as funções $\delta \mapsto L_\delta$ e $\delta \mapsto l_\delta$ pondo, para $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$l_\delta = \inf f(V_\delta) = \inf_{x\in V_\delta} f(x);$$
$$L_\delta = \sup f(V_\delta) = \sup_{x\in V_\delta} f(x).$$

Tem-se $l_{\delta_0} \leq l_\delta \leq L_\delta \leq L_{\delta_0}$ para todo $\delta \in (0, \delta_0]$. Se $0 < \delta' \leq \delta'' \leq \delta_0$, então, $V_{\delta'} \subset V_{\delta''}$ e, portanto, $l_{\delta''} \leq l_{\delta'}$ e $L_{\delta'} \leq L_{\delta''}$. Assim, l_δ é uma função monótona não-crescente de δ, enquanto L_δ é uma função não-decrescente de δ. Segue-se do Teorema 12 que existem os limites $\lim_{\delta\to 0} l_\delta$ e $\lim_{\delta\to 0} L_\delta$. De fato, como tais funções se acham definidas apenas para $\delta > 0$, esses são limites laterais (à direita). Vale então o

Teorema 14. *Seja* f *limitada numa vizinhança de* a. *Então*

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0} L_\delta \quad e \quad \liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0} l_\delta.$$

Demonstração. Sejam $L = \limsup_{x\to a} f(x)$ e $L_0 = \lim_{\delta\to 0} L_\delta$. Como L é valor de aderência, temos $L \in \overline{f(V_\delta)}$ para todo $\delta > 0$ e portanto $L \leq L_\delta$ para todo δ. Segue-se que $L \leq L_0$. Para mostrar que $L_0 \leq L$, basta provar que L_0 é valor de aderência de f no ponto a. Por simplicidade, escrevamos L_n em vez de $L_{1/n}$. É claro que $L_0 = \lim_{n\to\infty} L_n$. Segue-se da definição de sup que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in V_{1/n}$, isto é, $x_n \in X$, $0 < |x_n - a| < 1/n$, tal que $L_n - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq L_n$. Segue-se

que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = \lim L_n = L_0$. Logo L_0 é valor de aderência, donde $L_0 \leq L$. Concluímos que $L = L_0$. A segunda afirmação do teorema se demonstra de maneira semelhante.

Teorema 15. *Seja* f *limitada numa vizinhança de* a. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, *onde* $l = \liminf_{x \to a} f(x)$ *e* $L = \limsup_{x \to a} f(x)$.

Demonstração. Pelo Teorema 14, $l = \lim_{\delta \to 0} l_\delta$ e $L = \lim_{\delta \to 0} L_\delta$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta_1 > 0$, e $\delta_2 > 0$, tais que $0 < \delta < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon < l_\delta$ e $0 < \delta < \delta_2 \Rightarrow L_\delta < L + \varepsilon$. Seja δ um número positivo menor do que δ_1 e δ_2. Então $l - \varepsilon < l_\delta \leq L_\delta < L + \varepsilon$. Assim sendo, $x \in V_\delta \Rightarrow l - \varepsilon < l_\delta \leq f(x) \leq L_\delta < L + \varepsilon$. Está verificada a tese do teorema.

Corolário. *Seja* f *limitada numa vizinhança de* a. *Então existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *se, e somente se,* f *possui um único valor de aderência no ponto* a.

Com efeito, se f possui um único valor de aderência no ponto a então $L = l$. O Teorema 15 nos diz que $L = l$ é o limite de f no ponto a. A recíproca está contida no Teorema 6.

Observação: Como no caso de seqüências, L pode ser caracterizado como o menor número que goza da propriedade enunciada no teorema acima. Do mesmo modo, l é o maior número com aquela propriedade.

Exercícios

1. Na definição do limite $\lim_{x \to a} f(x)$, retire a exigência de ser $x \neq a$. Mostre que esta nova definição coincide com a anterior no caso $a \notin X$ mas, para $a \in X$, o novo limite existe se, e somente se, o antigo existe e é igual a $f(a)$.

2. Considere o seguinte erro tipográfico na definição de limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta.$$

Mostre que f cumpre esta condição se, e somente se, é limitada em qualquer intervalo limitado de centro a. No caso afirmativo, L pode ser qualquer número real.

3. Seja $X = Y \cup Z$, com $a \in Y' \cap Z'$. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tomemos $g = f|Y$ e $h = f|Z$. Se $\lim_{x \to a} g(x) = L$ e $\lim_{x \to a} h(x) = L$ então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

4. Seja $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$. Então $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$.

5. Seja $f(x) = x + 10 \cdot \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Prove o mesmo para a função $g(x) = x + \dfrac{x}{2} \operatorname{sen} x$.

6. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ monótona, com $f(X) \subset [a, b]$. Se $f(X)$ é denso no intervalo $[a, b]$ então, para cada $c \in X'_+ \cap X'_-$, tem-se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$. Se $c \in X$ então este limite é igual a $f(c)$.

7. Demonstre o Teorema 2.

8. Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Se existir uma seqüência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$, então $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

9. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é monótona então o conjunto dos pontos $a \in X'$ para os quais não se tem $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ é enumerável.

10. Enuncie e demonstre para funções o análogo do Teorema 14 do Capítulo IV.

11. Dado $a > 1$, defina $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(p/q) = a^{p/q}$. Prove que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Conclua que para cada $b \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x\to b} f(x)$, sendo este limite igual a $f(b)$ se $b \in \mathbb{Q}$. Chame este limite de a^b. Prove que $a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$ e que $b < b' \Rightarrow a^b < a^{b'}$.

12. Dado $a > 1$, defina $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo $g(x) = a^x$ (veja o exercício anterior). Prove que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

13. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um polinômio real. Se o coeficiente do termo de grau mais elevado de p é positivo então $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ é igual a $+\infty$ ou a $-\infty$, conforme o grau de p seja par ou ímpar.

14. Determine o conjunto dos valores de aderência da função $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1 + e^{1/x}}$, no ponto $x = 0$.

15. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$. Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$ então o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é $\{L\}$, $\{-L\}$ ou $\{L, -L\}$.

16. Dados um número real a e um conjunto compacto não-vazio K, obtenha uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a seja K.

17. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se x é irracional, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = q$ se $\dfrac{p}{q}$ é uma fração irredutível com $p > 0$, $f(0) = 0$. Mostre que f é ilimitada em qualquer intervalo não-degenerado.

18. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$. Se, para $a \in X'$ e $b \in Y'$ tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ e, além disso, $f(x) \neq b$ para todo $x \in X - \{a\}$, então

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. Mostre que a condição $b \in Y'$ decorre de ser $f(x) \neq b$ para $x \neq a$.

19. Para todo número real x, indiquemos com $[x]$ o maior inteiro $\leq x$. Mostre que se a e b são positivos então

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Prove também que, no primeiro caso, o limite à esquerda seria o mesmo mas no segundo caso o limite é $+\infty$ quando $x \to 0$ por valores negativos.

20. Dadas $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ defina $h = \max\{f, g\}\colon X \to \mathbb{R}$ pondo $h(x) = f(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ e $h(x) = g(x)$ caso $g(x) \geq f(x)$. Seja $a \in X'$. Prove que se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim h(x) = N$, onde N é o maior dos dois números L e M.

21. Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ limitadas numa vizinhança do ponto $a \in X'$. Mostre que $\limsup_{x\to a}(f+g) \leq \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x)$ e que $\limsup_{x\to a}[-f(x)] = -\liminf_{x\to a}[f(x)]$. Enuncie e prove resultados análogos para $\liminf\,(f+g)$ e para o produto de duas funções. (Veja o Exercício 17, Capítulo IV.)

22. Seja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Se $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$ então $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

23. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + ax \cdot \operatorname{sen} x$. Mostre que $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

24. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante. Dado $b \in \mathbb{R}$, suponha que existe uma seqüência (x_n), tal que $\lim p(x_n) = b \in \mathbb{R}$. Prove que (x_n) é limitada e o conjunto dos seus valores de aderência é não-vazio, contido em $p^{-1}(b)$. Em particular, se existe uma seqüência (x_n), tal que $\lim p(x_n) = 0$, então p tem alguma raiz real.

Capítulo VII

Funções Contínuas

A idéia de função contínua é o tema central da Topologia. O estudo de funções contínuas reais de uma variável real, que faremos neste capítulo, tem o duplo propósito de estabelecer os fatos e conceitos topológicos essenciais à Análise e, ao mesmo tempo, fornecer ao leitor um primeiro contato com as noções básicas da Topologia, à guisa de introdução a essa disciplina.

Depois de definir a noção de função contínua, demonstraremos suas propriedades mais elementares e examinaremos (no §2) os diferentes modos pelos quais uma função pode deixar de ser contínua. Em seguida estabeleceremos as relações entre a continuidade e as propriedades topológicas dos subconjuntos da reta que foram introduzidas no Capítulo V. Finalmente, estudaremos com certo detalhe o importante conceito de continuidade uniforme.

1 A noção de função contínua

Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a.

Em termos precisos, diremos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente,

pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0;\ x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Em termos de intervalos: dado qualquer intervalo aberto J contendo $f(a)$, existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que $f(I \cap X) \subset J$. Sempre que desejarmos, podemos tomar $J = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, e $I = (a - \delta, a + \delta)$, com $\delta > 0$.

Diremos, simplesmente, que $f: X \to \mathbb{R}$ é *contínua* quando f for contínua em todos os pontos de X.

Observações:

1. Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a quando $a \in X$.

2. Se a é um ponto isolado de X então *toda* função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a. (Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in X$ implica $x = a$ e portanto $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.) Em particular, se todos os pontos de X são isolados então qualquer função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua.

3. Seja agora $a \in X$ um ponto de acumulação de X. Então $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite. Reciprocamente, poderíamos definir $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pela condição de ser contínua no ponto a a função $g: X \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, onde $g(a) = L$ e $g(x) = f(x)$ para $x \in X - \{a\}$.

4. Ao investigar a continuidade de uma função f num ponto ou num conjunto, é fundamental ter sempre em conta o domínio de f. Por exemplo, dada $f: X \to \mathbb{R}$, seja $Y \subset X$. Consideremos as duas afirmações:

(A) A função f é contínua em cada ponto $a \in Y$;
(B) A restrição $f|Y$ é uma função contínua.

Evidentemente, (A) $\Rightarrow$ (B) mas a recíproca é falsa: basta considerar Y finito ou, mais geralmente, um conjunto Y cujos pontos são todos isolados. Então $f|Y$ é sempre contínua mas $f\colon X \to \mathbb{R}$ pode ser descontínua em algum ponto de Y. O fato é que (A) se refere ao comportamento de $f(x)$ com x próximo de a, para qualquer x em X. Por outro lado, (B) é uma afirmação que diz respeito apenas aos pontos de Y.

Exemplo 1. Toda função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua porque todo ponto de $\mathbb{Z}$ é isolado. Pela mesma razão, toda função definida no conjunto $X = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é contínua. Por outro lado, se $Y = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ então uma função $f\colon Y \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, é contínua no ponto 0 (já que os demais pontos de Y são todos isolados). Em outras palavras, $f\colon Y \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(1/n)$.

As proposições que enunciamos abaixo decorrem imediatamente dos fatos análogos demonstrados para limites no capítulo anterior, juntamente com a Observação 3 acima feita. A título de exercício, o leitor pode adaptar aquelas demonstrações para o contexto de funções contínuas.

Teorema 1. *Toda restrição de uma função contínua é contínua. Mais precisamente: seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *contínua no ponto* $a \in X$. *Se* $a \in Y \subset X$ *e* $g = f|Y$, *então* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *é contínua no ponto* a. *Quando* $Y = I \cap X$, *onde* I *é um intervalo aberto contendo* a, *então vale a recíproca: se* $g = f|Y$ *é contínua no ponto* a *então* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *também é contínua no ponto* a.

Destaquemos a parte final do Teorema 1. Ela diz que a continuidade de uma função f é um fenômeno *local* ou seja, se f coincide, nas proximidades do ponto a, com uma função que é contínua em a, então f também é contínua nesse ponto. (Coincidir com uma função contínua nas proximidades de a significa que, para um certo intervalo aberto I, contendo a, a restrição $f|(I \cap X)$ é contínua no ponto a.)

Teorema 2. *Se* $f: X \to \mathbb{R}$ *é contínua no ponto* $a \in X$, *então* f *é limitada numa vizinhança de* a, *isto é, existe* $\delta > 0$ *tal que, pondo* $U_\delta = X \cap (a - \delta, a + \delta)$, *o conjunto* $f(U_\delta)$ *é limitado.*

Teorema 3. *Se* $f, g: X \to \mathbb{R}$ *são contínuas no ponto* $a \in X$ *e* $f(a) < g(a)$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < g(x)$ *para todo* $x \in X$ *com* $|x - a| < \delta$.

Corolário. *Sejam* $f: X \to \mathbb{R}$ *contínua no ponto* $a \in X$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *uma constante. Se* $f(a) < k$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < k$ *para todo* $x \in X$ *com* $|x - a| < \delta$.

O corolário do Teorema 3 é um fato simples, porém, extremamente importante nas aplicações. Vale a pena, portanto, dar sua demonstração explícita. Ei-la:

Sendo $f(a) < k$, tomamos $\varepsilon = k - f(a) > 0$. Pela definição de função contínua, a este ε corresponde um $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Mas $f(a) + \varepsilon = k$. Logo todo ponto $x \in X$, cuja distância ao ponto a seja menor do que δ cumpre $f(x) < k$.

Evidentemente, um resultado análogo é válido se $f(a) > k$: existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$. O mesmo se dá para $f(a) \neq k$: deve existir $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \neq k$. (Com efeito, se $f(a) \neq k$, tem-se $f(a) > k$ ou então $f(a) < k$. Aplica-se então um dos dois resultados anteriores.)

Suponhamos agora que f seja *contínua em todos os pontos de* X e consideremos o conjunto A dos pontos $a \in X$ tais que $f(a) > k$, ou seja,

$$A = \{a \in X;\ f(a) > k\}.$$

Que se pode dizer sobre A? Pelo que vimos, para cada ponto $a \in A$, existe um intervalo aberto $I_a = (a - \delta, a + \delta)$ tal que $x \in I_a \cap X \Rightarrow f(x) > k$. Isto significa que $a \in I_a \cap X \subset A$ para todo $a \in A$. Seja $U = \bigcup_{a \in A} I_a$. Então U é um conjunto aberto e

$a \in U \cap X \subset A$ para todo $a \in A$, ou seja, $A \subset U \cap X \subset A$; em suma, $A = U \cap X$.

Em particular, *quando* X *é aberto, o conjunto* A *é aberto*, como interseção $A = U \cap X$ de dois abertos.

Teorema 4. *Para que* $f: X \to \mathbb{R}$ *seja contínua no ponto* $a \in X$ *é necessário e suficiente que se tenha* $\lim f(x_n) = f(a)$ *para toda seqüência de pontos* $x_n \in X$ *com* $\lim x_n = a$.

Corolário 1. *Para que* f *seja contínua no ponto* a *é necessário que exista* $\lim f(x_n)$ *e independa de seqüência de números* $x_n \in X$ *com* $\lim x_n = a$.

Corolário 2. *A fim de que* f *seja contínua no ponto* a, *é suficiente que, para toda seqüência de pontos* $x_n \in X$ *com* $\lim x_n = a$, *exista* $\lim f(x_n)$.

Dadas as funções $f, g: X \to \mathbb{R}$, sabemos definir novas funções $f + g: X \to \mathbb{R}$, $f - g: X \to \mathbb{R}$, $f \cdot g: X \to \mathbb{R}$ e $f/g: X_0 \to \mathbb{R}$, onde $X_0 = X - g^{-1}(0) = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$. Temos $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. O Teorema 7 do Capítulo VI nos dá também:

Teorema 5. *Se* $f, g: X \to \mathbb{R}$ *são contínuas no ponto* $a \in X$, *então* $f + g$, $f - g$ *e* $f \cdot g$ *são contínuas nesse mesmo ponto. Se* $g(a) \neq 0$, *então* f/g *também é contínua no ponto* a.

Em particular, se f é contínua no ponto a então $c \cdot f$ é contínua no mesmo ponto, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Também o mesmo ocorre com $1/f$ se $f(a) \neq 0$.

Teorema 6. *A composta de duas funções contínuas é contínua. Ou seja, se* $f: X \to \mathbb{R}$ *e* $g: Y \to \mathbb{R}$ *são contínuas nos pontos* $a \in X$, $b = f(a) \in Y$, *respectivamente, e, além disso,* $f(X) \subset Y$, *então* $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ *é contínua no ponto* a.

A restrição de uma função contínua $g: Y \to \mathbb{R}$ a um subconjunto $X \subset Y$ é um caso particular de função composta: temos

$g|X = g \circ f$, onde $f\colon X \to Y$ é a inclusão, isto é, $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Exemplos.

2. Como a função identidade $x \mapsto x$ é evidentemente contínua em toda a reta, o mesmo ocorre com a função $x \mapsto x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ em virtude do Teorema 5. Do mesmo teorema resulta que todo polinômio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função contínua. Também é contínua toda função racional $f(x) = p(x)/q(x)$ (quociente de dois polinômios) nos pontos onde é definida, isto é, nos pontos onde seu denominador não se anula.

3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida assim: para $x \geq 5$, $f(x) = x + 1$. Se $x \leq 5$, então $f(x) = 16 - 2x$. Então f é contínua em todo ponto $a > 5$ pois coincide com a função contínua $g(x) = x+1$ no intervalo aberto $(5, +\infty)$, o qual contém a. Por motivo análogo, f é contínua em todo ponto $a < 5$. Também no ponto 5, f é contínua, pois $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 6 = f(5)$.

4. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Ou seja, $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $f(x) = -1$ quando $x < 0$. Então f é contínua em todos os pontos $x \neq 0$, mas não é contínua no ponto $x = 0$, porque não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

O motivo que assegura a continuidade da função do Exemplo 3, mas permite a descontinuidade no Exemplo 4, é fornecido pelo

Teorema 7. *Seja* $X \subset F_1 \cup F_2$, *onde* F_1 *e* F_2 *são fechados. Se a função* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é tal que suas restrições* $f|(X \cap F_1)$ *e* $f|(X \cap F_2)$ *são contínuas, então* f *é contínua.*

Demonstração. Seja $a \in X$. Para mostrar que f é contínua no ponto a, suponhamos dado $\varepsilon > 0$. Há três possibilidades. Primeira: $a \in F_1 \cap F_2$; então, como $f|(X \cap F_1)$ é contínua no ponto a, existe $\delta_1 > 0$ tal que $x \in X \cap F_1$, $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Analogamente, existe $\delta_2 > 0$, tal que $x \in X \cap F_2$, $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se

$x \in X$ e $|x-a| < \delta$, então $|x-a| < \delta_1$ e $|x-a| < \delta_2$. Logo, quer seja $x \in F_1$, quer seja $x \in F_2$, vale $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. A segunda possibilidade é $a \in F_1$ e $a \notin F_2$. Escolhemos $\delta_1 > 0$, tal que $x \in X \cap F_1$, $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Como F_2 é fechado, podemos obter $\delta_2 > 0$ tal que não exista $x \in F_2$ com $|x-a| < \delta_2$. (Lembre que $a \notin F_2$.) Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; se $x \in X$ e $|x-a| < \delta$, então $x \in F_1$ e $|x-a| < \delta_1$, logo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. A terceira possibilidade é $a \in F_2$ e $a \notin F_1$; ela seria tratada de maneira análoga à segunda. Em qualquer caso, $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.

Corolário. *Seja $X = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são fechados. Se a função $f: X \to \mathbb{R}$ é tal que suas restrições $f|F_1$ e $f|F_2$ são contínuas, então f é contínua.*

No caso do corolário, o domínio da função f é um conjunto fechado, o que não ocorre em geral. É evidente, porém, que o Teorema 7 (e o seu corolário) é válido quando se tem um número finito de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n$. O caso de uma infinidade de fechados é obviamente falso: todo conjunto X é reunião de fechados (a saber, seus pontos) e $f|\{x\}$ é sempre contínua, seja qual for $x \in X$, mas f pode não ser contínua.

Agora podemos entender melhor os dois exemplos anteriores. No Exemplo 3, temos $\mathbb{R} = F \cup G$, onde os conjuntos $F = (-\infty, 5]$ e $G = [5, +\infty)$ são fechados. Como $f|F$ e $f|G$ são contínuas, segue-se que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. No Exemplo 4, temos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, pondo $A = (-\infty, 0)$ e $B = [0, +\infty)$, vale $\mathbb{R} = A \cup B$ e as restrições $f|A$ e $f|B$ são contínuas. Mas A não é fechado. Este fato possibilita que f seja descontínua.

No caso de abertos, em vez de fechados, o resultado ainda vale. Mais ainda: é admissível cobrir X com uma infinidade desses conjuntos. O teorema seguinte está essencialmente contido na segunda parte do Teorema 1, mas vamos demonstrá-lo, de qualquer modo.

Teorema 8. *Seja $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura de X por meio dos abertos A_λ. Se uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é tal que, para todos os $\lambda \in L$, as restrições $f|(A_\lambda \cap X)$ são contínuas, então f é contínua.*

Demonstração. Tomemos $a \in X$. Para mostrar que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, suponhamos dado $\varepsilon > 0$. Existe algum $\lambda \in L$, tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow x \in A_\lambda$. Como $f|(A_\lambda \cap X)$ é contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $x \in A_\lambda \cap X$, $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Seja δ o menor dos números δ_1, δ_2. Se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$, então $x \in A_\lambda \cap X$ e $|x - a| < \delta_2$. Logo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Isto prova que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.

Corolário. *Seja* $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, *onde cada* A_λ *é aberto. Se cada restrição* $f|A_\lambda$ *é contínua, então* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Exemplo 5. Seja $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Definamos $f\colon X \to \mathbb{R}$, pondo $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Então $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua, pois $X = A \cup B$, onde $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ são abertos, com $f|A$ e $f|B$ contínuas. Este exemplo costuma chocar os principiantes.

O Teorema 8 e seu corolário sublinham o fato de que a continuidade é um fenômeno local.

2 Descontinuidades

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, um *ponto de descontinuidade* (ou, simplesmente, uma descontinuidade) da função f é um ponto $a \in X$ tal que f não é contínua no ponto a.

Dizer, portanto, que $a \in X$ é um ponto de descontinuidade de $f\colon X \to \mathbb{R}$ equivale a afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se pode encontrar um $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Exemplos.

6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para x racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Então todo número real é ponto de descontinuidade de f, pois não existe $\lim_{x \to a} f(x)$, seja qual for $a \in X$.

7. Definamos $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $g(x) = 0$ se x é irracional, $g(0) = 1$ e $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ quando p/q é uma fração irredutível não-nula, com $q > 0$. Se escrevermos $g_1 = g|\mathbb{Q}$ e $g_2 = g|(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, teremos, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g_1(x) = 0$ (veja o §2 do Capítulo VI) e $\lim_{x\to a} g_2(x) = 0$, porque $g_2 \equiv 0$. Segue-se imediatamente que, para todo número real a, tem-se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Concluímos, assim, que g é contínua nos números irracionais e descontínua nos racionais. (Seria impossível obter uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos de descontinuidade fossem exatamente os números irracionais. Veja o Exercício 18 deste capítulo.)

8. Seja $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x + \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$, $h(0) = 0$. Então o único ponto de descontinuidade de h é o ponto 0.

9. Seja $K \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor. Definamos uma função $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: pomos $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in K$. Se $x \notin K$, pomos $\varphi(x) = 1$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de φ é K. Com efeito, sendo $A = [0,1] - K$ um aberto no qual φ é constante (e, portanto, contínua), segue-se que $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em cada ponto $a \in A$. Por outro lado, como K não possui pontos interiores, para cada $k \in K$ podemos obter uma seqüência de pontos $x_n \in A$ com $\lim x_n = k$. Então $\lim \varphi(x_n) = 1 \neq 0 = \varphi(k)$. Logo φ é descontínua em todos os pontos $k \in K$.

Dizemos que $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma *descontinuidade de primeira espécie* no ponto $a \in X$ quando f é descontínua no ponto a e, além disso, existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$. (Caso a seja ponto de acumulação de X somente de um lado, exigimos apenas que o limite lateral correspondente exista.)

Uma descontinuidade $a \in X$ da função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *segunda espécie* quando $a \in X'_+$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ não existe ou então quando $a \in X'_-$ mas não existe o limite à esquerda de f no ponto a.

Exemplos.

10. Nos Exemplos 7 e 8 acima, temos descontinuidades de primeira espécie. No Exemplo 7, em cada ponto de descontinuidade a, existem os limites laterais, que são iguais porém diferentes do valor $f(a)$. No Exemplo 8, o limite à esquerda é -1 e o limite à direita é $+1$ no único ponto de descontinuidade.

Nos Exemplos 6 e 9, os pontos de descontinuidade são todos de segunda espécie.

11. Um exemplo conhecido de descontinuidade de segunda espécie é o da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. Seja qual for o valor atribuído a $f(0)$, o ponto 0 será uma descontinuidade de segunda espécie para f, pois não existe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ nem $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

12. Já $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, define uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja única descontinuidade é o ponto 0. Aí o limite à direita é zero, enquanto o limite à esquerda é 1. Trata-se, portanto, de uma descontinuidade de primeira espécie.

13. Se tomarmos $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + e^{1/x}}$ para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, teremos uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com uma única descontinuidade no ponto 0. Aí temos $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, enquanto $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ não existe. O ponto 0 é, portanto, uma descontinuidade de segunda espécie na qual existe o limite à direita, mas o limite à esquerda, embora tenha sentido (0 é ponto de acumulação à direita para o domínio de g), não existe.

14. Sem apelar para o Cálculo, é fácil dar exemplos de descontinuidade de segunda espécie na qual um dos limites laterais existe. Basta considerar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, ou se $x > 0$ é racional, enquanto $f(x) = 1$ para $x > 0$ irracional. Existe $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ mas não existe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Logo,

0 é uma descontinuidade do tipo procurado.

Teorema 9. *Uma função monótona* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *não admite descontinuidades de segunda espécie.*

Demonstração. Dado $a \in X$, como f é monótona, se $a+\delta \in X$ (respectivamente $a-\delta \in X$) então f é limitada no conjunto $[a, a+\delta] \cap X$ (respectivamente $[a-\delta, a] \cap X$). Logo existem os limites laterais que façam sentido no ponto a, pelo Teorema 12 do Capítulo VI.

Teorema 10. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *monótona. Se* $f(X)$ *é um conjunto denso em algum intervalo* I, *então* f *é contínua.*

Demonstração. Para cada $a \in X'_+$ seja $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$. Analogamente, se $a \in X'_-$, escrevamos $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$. Para fixar as idéias, suponhamos f não-decrescente. Tomemos $a \in X$. Se tem sentido falar em $f(a^+)$, isto é, se $a \in X'_+$, mostraremos que $f(a) = f(a^+)$. Com efeito, $f(a^+) = \inf\{f(x); x > a\}$. Sabemos que $a < x \Rightarrow f(a) \leq f(x)$. Logo $f(a) \leq f(a^+)$. Admitamos que seja $f(a) < f(a^+)$. Como existem pontos $x \in X$ com $x > a$, vemos que em $f(X)$ há pontos $f(x) \geq f(a^+)$. Assim sendo, todo intervalo I contendo $f(x)$ deve conter pelo menos o intervalo $(f(a), f(a^+))$, no qual não há pontos de $f(X)$ pois $x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ e $a < x \Rightarrow f(a^+) \leq f(x)$. Isto contradiz que $f(X)$ seja denso num intervalo I. Por conseguinte, $f(a) = f(a^+)$. De modo análogo veríamos que $f(a^-) = f(a)$ para todo $a \in X'_-$. Logo f é contínua.

Corolário. *Se* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é monótona e* $f(X)$ *é um intervalo, então* f *é contínua.*

Exemplo 15. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, se x é racional, e $f(x) = -x$, se x é irracional. Então f é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ que é contínua apenas no ponto 0. Isto se dá porque f não é monótona.

Continuaremos escrevendo

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Teorema 11. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de* f *é enumerável.*

Antes de demonstrar o Teorema 11, definamos uma função $\sigma\colon X \to \mathbb{R}$, pondo, para cada $x \in X$,

$$\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^+)|, \quad |f(x) - f(x^-)|\}$$

se $x \in X'_+ \cap X'_-$. Se $x \in X'_+$ ou $x \in X'_-$ apenas, poremos, respectivamente,

$$\sigma(x) = |f(x) - f(x^+)| \quad \text{ou} \quad \sigma(x) = |f(x) - f(x^-)|.$$

Finalmente, se x for um ponto isolado de X, poremos $\sigma(x) = 0$.

A função σ é definida quando f não possui descontinuidades de segunda espécie. Seu valor $\sigma(x)$ chama-se *salto* de f no ponto x.

Note-se que se $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in X$, então $0 \leq \sigma(x) \leq b - a$. O fato mais importante sobre σ é que $\sigma(x) > 0$ se, e somente se, $x \in X$ é uma descontinuidade de f.

Demonstração do Teorema 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D_n = \left\{x \in X; \sigma(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Basta pois mostrar que cada D_n é enumerável. Afirmamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, D_n só possui pontos isolados. Com efeito, seja $a \in D_n$. Sendo f descontínua no ponto a, temos $a \in X'$. Suponhamos $a \in X'_+$. Por definição de $f(a^+)$, dado n, existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta$, $x \in X \Rightarrow f(a^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(a^+) + \frac{1}{4n} \cdot$ Assim, para cada $x \in (a, a+\delta) \cap X$, vale $\sigma(x) \leq \frac{1}{2n} \cdot$ Se, porém tivermos $a \notin X'_+$,

escolhemos $\delta > 0$ tal que $(a, a+\delta) \cap X = \emptyset$. Em qualquer hipótese, para todo $a \in D_n$ existe um intervalo $(a, a+\delta)$ tal que $(a, a+\delta) \cap D_n = \emptyset$. De modo semelhante encontramos, para cada $a \in D_n$, um intervalo aberto $(a-\delta', a)$ tal que $(a-\delta', a) \cap D_n = \emptyset$. Isto mostra que nenhum ponto de D_n é ponto de acumulação. Em outras palavras, todo ponto de D_n é isolado. Segue-se que D_n é enumerável. (Veja o Corolário 2 do Teorema 8, Capítulo V.)

Corolário. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *monótona. O conjunto dos pontos de descontinuidade de* f *é enumerável.*

Com efeito, pelo Teorema 9, as descontinuidades de f são todas de primeira espécie.

3 Funções contínuas em intervalos

O teorema seguinte estabelece matematicamente o princípio bastante plausível de que uma função contínua definida num intervalo não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários.

Teorema 12. (Teorema do Valor Intermediário). *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$ *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Primeira demonstração. Como f é contínua no ponto a, dado $\varepsilon = d - f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a \le x \le a+\delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon = d$. Assim, todos os pontos x suficientemente próximos de a no intervalo $[a,b]$ são tais que $f(x) < d$. De modo análogo se verifica que todos os pontos y suficientemente próximos de b no intervalo $[a,b]$ são tais que $d < f(y)$. Em particular os conjuntos $A = \{x \in (a,b); f(x) < d\}$ e $B = \{y \in (a,b); d < f(y)\}$ são ambos não-vazios. O corolário do Teorema 3 nos diz que A e B são abertos. Se não existir um ponto c com $a < c < b$ e $f(c) = d$, então $(a,b) = A \cup B$, em contradição com a unicidade da decomposição de um aberto

como reunião de intervalos. (Veja o Corolário do Teorema 2, Capítulo V.)

Segunda demonstração. Seja $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. A não é vazio pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de A é maior do que todos os outros. Com efeito, seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\varepsilon = d - f(\alpha)$, a continuidade de f no ponto α nos dá um $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta)$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertencem a A. Agora ponhamos $c = \sup A$. Como c é limite de uma seqüência de pontos $x_n \in A$, temos $f(c) = \lim f(x_n) \leq d$. Como A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$.

Corolário 1. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *contínua num intervalo* I *(que pode ser fechado ou não, limitado ou ilimitado). Se* $a < b$ *pertencem a* I *e* $f(a) < d < f(b)$, *então existe* $c \in I$ *tal que* $f(c) = d$.

Basta restringir f ao intervalo $[a, b]$ e aplicar o Teorema 12.

Corolário 2. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *contínua num intervalo* I. *Então* $f(I)$ *é um intervalo.*

Com efeito, sejam $\alpha = \inf_{x \in I} f(x)$ e $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$. (Esta notação é simbólica. Podemos ter $\alpha = -\infty$, se f for ilimitada inferiormente em I, ou $\beta = +\infty$, no caso de f ser ilimitada superiormente em I.) Afirmamos que $f(I)$ é um intervalo, cujos extremos são α e β. Ou seja, dado y com $\alpha < y < \beta$, deve existir $x \in I$ tal que $y = f(x)$. De fato, pelas definições de inf e de sup (ou pela definição de conjunto ilimitado, no caso de algum dos extremos α ou β ser infinito) existem $a, b \in I$ tais que $f(a) < y < f(b)$. Pelo Teorema 12, existe um ponto x, entre a e b, tal que $f(x) = y$.

Observações:

1. O Teorema 12, evidentemente, vale também no caso de $f(b) < d < f(a)$.

2. No Corolário 2, nada afirmamos sobre os extremos do intervalo $f(I)$ pertencerem ou não ao intervalo. Poderemos ter $f(I) = [\alpha, \beta]$, ou $f(I) = (\alpha, \beta)$, ou $f(I) = [\alpha, \beta)$ ou $f(I) = (\alpha, \beta]$. Também o intervalo I é completamente arbitrário. Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Então, tomando $I = (-1, 3)$, temos $f(I) = [0, 9)$.

Exemplos.

16. Se I é um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que só assume valores inteiros, então f é constante. Com efeito, $f(I)$ deve ser um intervalo contido em $\mathbb{Z}$. Logo é degenerado (reduz-se a um ponto). Mais geralmente, se $Y \subset \mathbb{R}$ tem interior vazio e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(X) \subset Y$, então f é constante em cada intervalo que porventura X contenha.

17. O Teorema 12 pode ser usado para provar que todo polinômio real $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau ímpar (isto é, $a_n \neq 0$ e n ímpar) possui uma raiz real, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. Para fixar as idéias, suponhamos $a_n > 0$. Então podemos escrever $p(x) = a_n \cdot x^n \cdot r(x)$, onde

$$r(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

Evidentemente, $\lim_{x \to \pm\infty} r(x) = 1$. Como $\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n) = +\infty$ e (por ser n ímpar) $\lim_{x \to -\infty} (a_n x^n) = -\infty$, concluímos que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$. Tomando $I = \mathbb{R}$ no Corolário 2, vemos que $p(\mathbb{R})$ é um intervalo. Os limites acima calculados mostram que o intervalo $p(\mathbb{R})$ é ilimitado nos dois sentidos. Portanto $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Assim, $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Em particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

18. Usaremos agora o Teorema 12 para dar uma demonstração elegante da existência de $\sqrt[n]{y}$ para todo $y \geq 0$. (Veja o §3 do Capítulo III.) Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, definida por $f(x) = x^n$. Evidentemente, f é contínua. Logo sua imagem é um intervalo. Como $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, tal intervalo é $[0,+\infty)$, isto é, f é sobrejetiva. Assim sendo, para todo $y \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $x^n = y$. Além disso, f é crescente e, portanto, injetiva. Concluímos que f é uma bijeção. Dado $y \geq 0$, o número $x \geq 0$ tal que $x^n = y$ é único e se escreve $x = \sqrt[n]{y}$. Finalmente, a função $g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, inversa de f, tal que $g(y) = \sqrt[n]{y}$, é contínua em virtude do Teorema 13 a seguir.

Teorema 13. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua injetiva, definida num intervalo* I. *Então* f *é monótona, sua imagem* $J = f(I)$ *é um intervalo e sua inversa* $f^{-1}\colon J \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração. Como o leitor pode verificar sem dificuldade, para concluirmos que f é monótona, basta verificar sua monotonicidade em cada subintervalo limitado e fechado $[a,b] \subset I$. Assim, podemos admitir que $I = [a,b]$. Sabemos que $f(a) \neq f(b)$. Para fixar as idéias, vamos supor que $f(a) < f(b)$. Mostraremos então que f é crescente. Do contrário, existiriam pontos $x < y$ em $[a,b]$ tais que $f(x) > f(y)$. Há duas possibilidades: $f(a) < f(y)$ ou $f(a) > f(y)$. No primeiro caso, temos $f(a) < f(y) < f(x)$. Logo, pelo Teorema 12, existirá $c \in (a,x)$ com $f(c) = f(y)$, em contradição com a injetividade de f. No segundo caso, vem $f(y) < f(a) < f(b)$ e, novamente pelo Teorema 12, obteremos $c \in (y,b)$ com $f(c) = f(a)$, ainda contradizendo a injetividade de f. Isto prova que toda função real contínua e injetiva, definida num intervalo, é monótona. O Corolário 2 do Teorema 12 nos dá que $J = f(I)$ é um intervalo e o Teorema 10 (ou seu corolário) nos garante que $f^{-1}\colon J \to \mathbb{R}$ é contínua porque evidentemente $f^{-1}(J) = I$ e a inversa de uma função monótona é monótona. (Como $[a,b]$ é compacto, a continuidade de f^{-1} também resulta do Teorema 15 adiante.)

Observação: No caso do Teorema 13 (função contínua, injetiva, monótona), o intervalo $J = f(I)$ é do mesmo tipo (aberto, fechado, semi-aberto) que I. Com efeito, sendo f monótona injetiva, $a \in I$ é um extremo de I se, e somente se, $f(a)$ é um extremo de J. Note-se, porém, que um dos intervalos I, J pode ser ilimitado sem que o outro seja. Considere, por exemplo, a função $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$. Temos $f((0,1]) = [1,+\infty)$.

Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, uma bijeção contínua $f\colon X \to Y$, cuja inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é contínua, chama-se um *homeomorfismo* entre X e Y. O Teorema 13 diz que se X for um intervalo, a continuidade da inversa f^{-1} será conseqüência de continuidade de f. Deve-se notar, entretanto, que tal não ocorre em geral. Por exemplo, sejam $X = [0,1) \cup [2,3]$, $Y = [1,3]$ e $f\colon X \to Y$ a bijeção contínua definida por $f(x) = x + 1$, se $0 \le x < 1$, $f(x) = x$ se $2 \le x \le 3$. A inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ é descontínua no ponto 2. Com efeito, $f^{-1}(y) = y$ se $2 \le y \le 3$ e $f^{-1}(y) = y - 1$ se $1 \le y < 2$. Assim, $f^{-1}(2) = 2$ enquanto $\lim\limits_{y \to 2^-} f^{-1}(y) = 1$.

No parágrafo seguinte, veremos outra situação na qual a inversa de uma função contínua é contínua.

4 Funções contínuas em conjuntos compactos

Teorema 14. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* X *é compacto então* $f(X)$ *é compacto.*

Demonstração. Dada uma cobertura aberta $f(X) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, podemos, para cada $x \in X$, escolher $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. Em virtude da continuidade de f, cada ponto $x \in X$ pode ser posto num intervalo aberto I_x tal que $y \in X \cap I_x \Rightarrow f(y) \in A_{\lambda(x)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} I_x$. Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Conseqüentemente, $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \cdots \cup A_{\lambda(x_n)}$, o que prova a compacidade de $f(X)$.

Segunda demonstração. Seja (y_n) uma seqüência em $f(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X é compacto, podemos obter uma subseqüência convergente $x_{n_k} \to x \in X$. Sendo f contínua, temos $\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(X)$. Logo $f(X)$ é compacto, conforme a condição (4) do Teorema 11, Capítulo V.

Corolário (Weierstrass). *Toda função contínua* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *definida num compacto* X *é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem* $x_1, x_2 \in X$ *tais que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ *para todo* $x \in X$*).*

Com efeito, $f(X)$, sendo compacto, é limitado e fechado. Logo $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $\sup f(X) = f(x_2)$.

Exemplos.

19. A função contínua $f\colon (-1, +1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, não é limitada. Isto pode ocorrer porque seu domínio é um conjunto limitado, mas não fechado (e, portanto, não é compacto). Por outro lado, a função $g\colon (-1, +1) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x$, é contínua e limitada, mas não assume um valor máximo nem um valor mínimo no seu domínio $(-1, +1)$. A função $h\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, é contínua e limitada. Assume seu valor máximo no ponto $x = 0$, mas não existe $x \in [0, +\infty)$ tal que $h(x) = 0 = \inf\{h(x); x \in [0, +\infty)\}$. Isto é possível porque o domínio de h é um subconjunto fechado mas não limitado de $\mathbb{R}$.

20. Dados um ponto $a \in \mathbb{R}$ e um subconjunto fechado não-vazio $F \subset \mathbb{R}$, existe um ponto $x_0 \in F$ tal que $|a - x_0| \leq |a - x|$ para todo $x \in F$. (O ponto x_0 é o ponto de F *mais próximo* de a.) Para ver isto, basta considerar um intervalo fechado $[a-n, a+n]$ suficientemente grande de forma que a interseção $K = [a-n, a+n] \cap F$ seja não-vazia. K é limitado e fechado, donde compacto. Consideremos a função contínua $f\colon K \to \mathbb{R}$,

definida por $f(x) = |x - a|$. Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo num ponto $x_0 \in K$. Para todos os pontos $x \in F$ tem-se $|x_0 - a| \leq |x - a|$ porque os pontos de F que não pertencem a K situam-se fora do intervalo $[a - n, a + n]$ e, portanto, estão mais longe de a do que o ponto x_0. Note que se F não fosse fechado, poderíamos tomar $a \in \overline{F} - F$, logo o ínfimo da função f seria zero, não atingido em ponto algum $x \in F$. Portanto, quando F não é fechado, pode-se sempre achar um ponto a, do qual nenhum ponto de F é o mais próximo.

Teorema 15. *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *compacto. Se* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é contínua e injetiva então* $Y = f(X)$ *é compacto e a função inversa* $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $b = f(a) \in Y$. Para provar que f^{-1} é contínua no ponto b, consideremos uma seqüência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y$, com $y_n \to b$. Devemos mostrar que $f^{-1}(y_n) = x_n \to a = f^{-1}(b)$. Como $x_n \in X$, a seqüência (x_n) é limitada. Assim, é suficiente provar que a é o único valor de aderência de (x_n). Seja então (x'_n) uma subseqüência convergindo para um ponto a'. Como X é compacto, temos $a' \in X$. Além disso, $y'_n = f(x'_n)$ ainda converge para b. Como f é contínua no ponto a', temos $f(a') = \lim f(x'_n) = b$. Sendo f injetiva, isto força $a' = a$. O teorema está demonstrado.

5 Continuidade uniforme

Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$ podemos, para cada $a \in X$, obter $\delta > 0$ (que depende de ε e de a) tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em geral, não é possível obter, a partir do $\varepsilon > 0$ dado, um único $\delta > 0$ que sirva para todos os pontos $a \in X$.

Exemplos.

21. Seja $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$ Dado $\varepsilon > 0$, mostraremos

que não se pode escolher $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ seja qual for $a > 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, suponhamos escolhido $\delta > 0$. Tomemos um número positivo a tal que $0 < a < \delta$ e $0 < a < \frac{1}{3\varepsilon}\cdot$ Então, para $x = a + \frac{\delta}{2}$, temos $|x - a| < \delta$ mas

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{2}{2a+\delta} - \frac{1}{a}\right|$$
$$= \frac{\delta}{(2a+\delta)a} > \frac{\delta}{3\delta \cdot a} = \frac{1}{3a} > \varepsilon.$$

22. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$, com $c \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}\cdot$ Então, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, temos

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |(cx + d) - (ca + d)| = |cx - ca|$$
$$= |c|\,|x - a| < |c|\delta = \varepsilon.$$

Neste caso, foi possível, a partir do ε dado, obter um $\delta > 0$, que servisse para todos os pontos a do domínio de f.

As funções com essa propriedade chamam-se uniformemente contínuas. Mais formalmente:

Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

É óbvio que toda função uniformemente contínua é contínua. Mas a recíproca não vale.

Assim, a função contínua $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, não é uniformemente contínua pois, como vimos no Exemplo 21, dado $\varepsilon > 0$, seja qual for $\delta > 0$, podemos encontrar pontos x, y no domínio de f, com $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Por outro lado, a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cx + d$, é uniformemente contínua, como vimos no Exemplo 22. (Ali supusemos $c \neq 0$, mas é claro que $c = 0$ dá uma função constante, que é uniformemente contínua.)

A fim de que $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ não seja uniformemente contínua, é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\delta > 0$, podem-se obter $x_\delta, y_\delta \in X$ tais que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ mas $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Exemplo 23. Seja $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *lipschitziana.* Isto significa que existe uma constante $c > 0$, tal que $x, y \in X \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. Então f é uniformemente contínua: dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/c$. Uma função linear, $f(x) = cx + d$, é lipschitziana em toda a reta, com constante $|c|$. A função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, é lipschitziana se X for limitado. Por exemplo, se tivermos $|x| \leq A$ para todo $x \in X$, então, dados $x, y \in X$ quaisquer, vale

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leq 2A \cdot |x - y|.$$

Basta tomar $c = 2A$. Por outro lado, se $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ não é sequer uniformemente contínua. Com efeito, seja $\varepsilon = 1$. Qualquer que seja $\delta > 0$ escolhido, podemos tomar $x > \frac{1}{\delta}$ e $y = x + \frac{\delta}{2} \cdot$ Então $|x - y| < \delta$ mas

$$|f(x) - f(y)| = \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta > 1.$$

Com um pouco mais de trabalho se mostra que para todo $n > 1$ a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^n$, não é uniformemente contínua.

Teorema 16. *Seja* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uniformemente contínua. Se* (x_n) *é uma seqüência de Cauchy em* X *então* $(f(x_n))$ *é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \delta$. Logo, $m, n > n_0 \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, ou seja, $(f(x_n))$ é uma seqüência de Cauchy.

Corolário. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *uniformemente contínua. Para todo* $a \in X'$, *existe* $\lim_{x \to a} f(x)$.

Com efeito, para toda seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $x_n \to a$, a seqüência $(f(x_n))$ é convergente, por ser de Cauchy. Então existe $\lim_{x \to a} f(x)$, pelo Corolário 2, Teorema 6, Capítulo VI. (Este corolário também decorre do Teorema 8, Capítulo VI.)

Exemplo 24. As funções $f, g\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = 1/x$, não são uniformemente contínuas pois não possuem limite quando $x \to 0$.

Para mostrar que $f\colon X \to \mathbb{R}$ *não é* uniformemente contínua basta obter $\varepsilon > 0$ e duas seqüências de pontos $x_n, y_n \in X$ tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ para todo n. Por exemplo, $f(x) = x^3$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, como se vê tomando $x_n = n + 1/n$ e $y_n = n$. Temos $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $x_n^3 - y_n^3 \geq 3$ para todo n.

Teorema 17. *Seja* X *compacto. Toda função contínua* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $x \in X$, f é contínua no ponto x. Logo existe $\delta_x > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < 2\delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Pondo $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, a cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$ admite uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Seja δ o menor dos números $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}$. Se $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$, devemos ter $x \in I_{x_j}$ para algum j, donde $|x - x_j| < \delta_{x_j}$ e daí $|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < 2\delta_{x_j}$. Estas desigualdades implicam $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(y) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Segunda demonstração. Suponhamos que f não seja uniformemente contínua. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_n \in X$ e $y_n \in X$ com $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Como X é compacto, uma subseqüência (x_{n_k}) converge para um ponto $x \in X$. Forçosamente, temos $\lim y_{n_k} = x$ também. Como f é contínua, $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(x)$, mas isto contradiz a desigualdade $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ para todo k. Logo f é uniformemente contínua.

Exemplo 25. A função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, é contínua (como inversa de $x \mapsto x^2$, definida no mesmo intervalo) e portanto é uniformemente contínua, pois $[0,1]$ é compacto. Convém notar que f não é lipschitziana em intervalo algum ao qual 0 seja aderente porque o quociente $\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ não é limitado para valores muito pequenos de x e y. Por outro lado, a função $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ (da qual f é uma restrição) é uniformemente contínua, embora seu domínio não seja compacto. É suficiente observar que $g|[1, +\infty)$ é lipschitziana: $|g(x) - g(y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|$, desde que $x \geq 1$ e $y \geq 1$. Como se vê facilmente, da continuidade uniforme de $g|[0,1]$ e $g|[1, +\infty)$ se conclui a continuidade uniforme de g em todo o seu domínio $[0, +\infty)$. (Não seja, entretanto, muito otimista. Veja os Exercícios 38 e 39 no fim deste capítulo.)

Diz-se que uma função $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ é uma *extensão* de $f\colon X \to \mathbb{R}$ quando f é uma restrição de φ, isto é, quando se tem $X \subset Y$ e $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Quando φ for contínua, dir-se-á que f estende-se continuamente à função φ.

O teorema seguinte completa o corolário do Teorema 16.

Teorema 18. *Toda função uniformemente contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ admite uma extensão contínua $\varphi\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$; φ é a única extensão contínua de f a $\overline{X}$ e é uniformemente contínua.*

Demonstração. Temos $\overline{X} = X \cup X'$. Para todo $x' \in X'$, ponhamos $\varphi(x') = \lim_{x \to x'} f(x)$. Este limite existe, pelo corolário do

Teorema 16. Como f é contínua, vemos que $\varphi(x') = f(x')$ caso $x' \in X' \cap X$. Completamos a definição de φ pondo $\varphi(x) = f(x)$ para $x \in X$. Notemos que, para todo $\bar{x} \in \overline{X}$, se $\bar{x} = \lim x_n$ com $x_n \in X$, então $\varphi(\bar{x}) = \lim f(x_n)$. Mostremos agora que φ é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade uniforme de f nos dá um $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Afirmamos que o mesmo δ satisfaz para a continuidade uniforme de φ. Com efeito, se $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$ são tais que $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, temos $\bar{x} = \lim x_n$ e $\bar{y} = \lim y_n$, com $x_n, y_n \in X$. Daí vem $|\bar{x} - \bar{y}| = \lim |x_n - y_n|$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - y_n| < \delta$. Segue-se que $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > n_0$ e, portanto,

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Falta apenas verificar a unicidade de φ, mas isto é imediato: se $\psi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ fosse outra extensão contínua de f, então, para todo $\bar{x} \in X$, escrevendo $\bar{x} = \lim x_n$, com $x_n \in X$, teríamos

$$\begin{aligned}\psi(\bar{x}) = \psi(\lim x_n) = \lim \psi(x_n) = \lim f(x_n) = \lim \varphi(x_n)\\ = \varphi(\lim x_n) = \varphi(\bar{x}).\end{aligned}$$

Corolário. *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uniformemente contínua. Se* X *é limitado, então* $f(X)$ *é limitado; isto é,* f *é limitada em* X.

Com efeito, seja $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ a extensão contínua de f ao fecho de X. Como X é limitado, $\overline{X}$ é limitado e fechado, e portanto compacto. Pelo Teorema 14, $\varphi(\overline{X})$ é compacto e portanto limitado. Como $f(X) \subset \varphi(\overline{X})$, a conclusão segue-se.

Exercícios

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua que, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então $C = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

2. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ contínua, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Para todo $k \in \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \leq k$ tem a forma $F \cap X$, onde F é fechado. Resultado análogo vale para o conjunto dos pontos $x \in X$, tais que $f(x) = k$ e para o conjunto dos pontos $x \in X$, nos quais duas funções contínuas $f, g: X \to \mathbb{R}$ assumem valores iguais. Em particular, se X é fechado então esses três conjuntos são fechados.

3. Dadas $f, g: X \to \mathbb{R}$, definamos as funções $f \vee g: X \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g: X \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $x \in X$, $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que se f e g são contínuas num ponto $a \in X$ o mesmo se dá com $f \vee g$ e $f \wedge g$.

4. Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, definida num aberto $A \subset \mathbb{R}$, é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$ os conjuntos $E[f < c] = \{x \in A; f(x) < c\}$ e $E[f > c] = \{x \in A; f(x) > c\}$ são abertos.

5. Seja $f: F \to \mathbb{R}$ definida num conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$. A fim de que f seja contínua é necessário e suficiente que, para todo $c \in \mathbb{R}$, sejam fechados os conjuntos $E[f \leq c] = \{x \in F; f(x) \leq c\}$ e $E[f \geq c] = \{x \in F; f(x) \geq c\}$.

6. Dado um subconjunto não-vazio $S \subset \mathbb{R}$, defina $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \inf\{|x - s|; s \in S\}$. Prove que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Conclua que f é (uniformemente) contínua.

7. Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $\overline{Y} \subset X$ e $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$, então $f|\overline{Y} = g|\overline{Y}$. Conclua que se duas funções contínuas $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, então $f = g$.

8. Sejam $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $f(1) = g(0)$, então é contínua a função $h: [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(2x)$ se $0 \leq x \leq 1/2$, e $h(x) = g(2x - 1)$ se $1/2 \leq x \leq 1$.

É também contínua a função $f^*: [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f^*(x) = f(1 - x)$.

9. Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto. A fim de que $f: A \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário e suficiente que $f^{-1}(B)$ seja aberto, qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}$ aberto.

10. Seja $F \subset \mathbb{R}$ fechado. Uma função $f: F \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo conjunto fechado $G \subset \mathbb{R}$, sua imagem inversa $f^{-1}(G)$ é fechada.

11. Seja $X = Y \cup Z$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é tal que $f|Y$ e $f|Z$ são contínuas então f é contínua em todo ponto $a \in Y \cap Z$.

12. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência de pontos $x_n \in X$ tais que $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado. Dada uma função contínua $f: F \to \mathbb{R}$, existe $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\varphi|F = f$. (*Sugestão*: Defina φ linearmente nos intervalos componentes de $\mathbb{R} - F$ de modo a coincidir com f nos extremos de cada intervalo.)

14. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que as seguintes condições sobre f são equivalentes:

    a) $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$;

    b) Se $|x_n| \to +\infty$, então $|f(x_n)| \to +\infty$;

    c) Se K é compacto, então $f^{-1}(K)$ é compacto.

15. Defina uma bijeção $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.

16. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ monótona, tal que $f(X)$ seja denso num intervalo limitado. Mostre que existe uma única função contínua (monótona) $\varphi: \overline{X} \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi|X = f$.

17. Seja K o conjunto de Cantor. Escreva $A = [0,1] - K$ e defina uma função monótona não-decrescente $f\colon A \to \mathbb{R}$, constante em cada intervalo componente de A, tal que $f(A)$ seja o conjunto das frações da forma $\frac{m}{2^n}$ pertencentes a $[0,1]$. Mostre que existe uma função monótona contínua $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que coincide com f nos pontos de A. (Função de Cantor.)

18. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto C_n, formado pelos pontos $a \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que $x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\cdot$ Prove:

    1. Cada C_n é um conjunto aberto;
    2. f é contínua no ponto a se, e somente se, $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

    Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma interseção enumerável de abertos. Em particular (veja o Exercício 55, Capítulo V) não existe uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua nos pontos racionais e descontínua nos irracionais.

19. Não existe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que transforme todo número racional num irracional e vice-versa.

20. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$, contínua, limitada num intervalo. Para todo $a \in \overline{I}$, o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é um intervalo (compacto). Isto inclui $a = -\infty$ e $a = +\infty$, no caso de ser ilimitado o intervalo I. Em particular, se $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada, o conjunto dos pontos da forma $c = \lim f(x_n)$ onde $x_n \to +\infty$ é um intervalo fechado e limitado.

21. Sejam T o conjunto dos números transcendentes negativos e A o conjunto dos números algébricos ≥ 0. Defina

$f: T \cup A \to [0, +\infty)$ pondo $f(x) = x^2$. Mostre que f é uma bijeção contínua, cuja inversa é descontínua em todos os pontos, exceto 0.

22. Seja $f: [a, b] \to [a, b]$ contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. (Teorema de Brouwer em dimensão 1.) Dê exemplo de uma função contínua $f: [0, 1) \to [0, 1)$ sem ponto fixo.

23. Seja n ímpar. Prove que, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^n = y$ e que, escrevendo $x = \sqrt[n]{y}$, a função $y \mapsto \sqrt[n]{y}$, assim definida é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

24. Sejam K compacto e F fechado, não-vazios. Mostre que existem $x_0 \in K$, $y_0 \in F$, tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$, para quaisquer $x \in K$, $y \in F$. Dê exemplo de dois conjuntos fechados e disjuntos F, G tais que $\inf\{|x - y|;\ x \in F, y \in G\} = 0$.

25. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$, sua imagem $f(A)$ for aberta, então f é injetiva e portanto monótona.

26. Seja $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau par, cujo coeficiente líder é positivo. Prove que p assume um valor mínimo em $\mathbb{R}$, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $p(x_0) < 0$, mostre que p possui pelo menos duas raízes reais. Enuncie e demonstre resultados análogos quando o coeficiente líder de p é negativo.

27. Se toda função contínua, definida num certo conjunto X, é limitada, então X é compacto.

28. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, então existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ no qual f assume seu valor mínimo.

29. Mostre que $f\colon (-1,+1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, é um homeomorfismo entre o intervalo $(-1,+1)$ e a reta.

30. Classifique os intervalos da reta quanto a homeomorfismos, isto é, faça uma lista de tipos de modo que dois intervalos são homeomorfos se, e somente se, têm o mesmo tipo. (Por exemplo, dois intervalos abertos quaisquer, limitados ou não, são sempre homeomorfos. Já um intervalo fechado, limitado, só pode ser homeomorfo a outro que seja também limitado e fechado).

31. Se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas então $f+g$, $f \wedge g$ e $f \vee g$ também o são. (Veja o Exercício 3 acima.) Por outro lado, o produto de duas funções uniformemente contínuas pode não ter essa propriedade, a menos que as funções sejam limitadas. A composta de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

32. Seja $g\colon \mathbb{R} \to (-1,+1)$ o inverso do homeomorfismo f definido no Exercício 29. Mostre que g é uniformemente contínuo mas $g^{-1} = f$ não o é.

33. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, é uniformemente contínua, mas $g(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ define uma $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que não é uniformemente contínua.

34. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-fechado. Mostre que existe uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ que não se estende continuamente a $\overline{X}$.

35. Um polinômio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua se, e somente se, tem grau ≤ 1.

36. $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$ com $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, tais que $y, z \in X \cap I_x \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$. A função f é uniformemente contínua se, e somente se, para cada

$\varepsilon > 0$, os intervalos I_x puderem ser escolhidos com o mesmo comprimento.

37. A função $f(x) = x^n$ é lipschitziana em cada conjunto limitado mas, se $n > 1$, não é uniformemente contínua num intervalo ilimitado.

38. A função $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, não é lipschitziana num intervalo da forma $[0, a]$, $a > 0$, embora seja uniformemente contínua aí. Por outro lado, f é lipschitziana, com constante $c = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}$, no intervalo $[a, +\infty)$. Concluir que f é uniformemente contínua em $[0, +\infty)$.

39. Seja $\mathbb{N}^* = \left\{n + \dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Escreva $F = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*$ e defina $f\colon F \to \mathbb{R}$ pondo $f(n) = 2$ e $f\left(n + \dfrac{1}{n}\right) = n + \dfrac{1}{n}$. Mostre que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ são fechados, que $f|\mathbb{N}$ e $f|\mathbb{N}^*$ são uniformemente contínuas, mas $f\colon F \to \mathbb{R}$ não é uniformemente contínua.

40. Dê exemplo de dois abertos A, B e uma função contínua $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ tal que $f|A$ e $f|B$ sejam uniformemente contínuas, mas f não seja.

41. Toda função contínua monótona limitada $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é uniformemente contínua.

42. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua. Para que f se estenda continuamente a uma função $\varphi\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ é necessário e suficiente que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ para todo $a \in X'$.

43. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ tais que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $x, y \in [a_{i-1}, a_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

44. Uma função contínua $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *poligonal* quando existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que $\varphi|[a_{i-1}, a_i]$ é um polinômio de grau ≤ 1, para cada $i = 1, \ldots, n$. Prove que, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então, dado $\varepsilon>0$, existe uma função poligonal $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

45. Dado $\xi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, se existem $a=a_0<a_1 < \cdots < a_n=b$ tais que $\xi|(a_{i-1}, a_i)$ é constante $(= c_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, ξ chama-se uma *função-escada.* Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função escada $\xi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - \xi(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in [a,b]$.

46. Dada uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g\colon X \to \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Então f é contínua.

47. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *semicontínua superiormente no ponto* $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$, tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)+\varepsilon$. Diz-se que f é *semicontínua superiormente* quando ela o é em todos os pontos de X.

    a) Defina função semicontínua inferiormente e mostre que f é contínua num ponto se, e somente se, é semicontínua superior e inferiormente naquele ponto.

    b) Prove que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, sua função característica $\xi_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (definida por $\xi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\xi_A(x) = 0$ se $x \notin A$) é semicontínua inferiormente.

    c) Enuncie e prove um resultado análogo ao anterior para conjuntos fechados.

d) Mostre, mais geralmente, que para todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, sua função característica $\xi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua precisamente nos pontos da fronteira de X. Dado $a \in \operatorname{fr} X$, mostre que ξ_X é semicontínua superiormente no ponto a se $a \in X$ e inferiormente se $a \notin X$. Conclua que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ para x irracional, é semicontínua superiormente nos números racionais e inferiormente nos números irracionais.

e) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = c$. Mostre que f é semicontínua superiormente no ponto 0 se, e somente se, $c \geq 1$. (E inferiormente se, e somente se, $c \leq -1$.) Tomando $-1 < c < 1$, mostre que f é semicontínua no ponto 0.

f) As funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(0) = g(0) = 0$ e, para $x \neq 0$, $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{|x|}$, são semicontínuas inferiormente, mas seu produto $f \cdot g$ não é uma função semicontínua no ponto 0.

g) Para que $f\colon X \to \mathbb{R}$ seja semicontínua superiormente no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que $\limsup_{x \to a} f(x) \leq f(a)$. Equivalentemente: para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, que seja $\limsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(a)$. Vale resultado análogo para semicontinuidade inferior.

h) A soma de duas funções semicontínuas superiormente num ponto ainda goza da mesma propriedade. Use o item e) com $c = 1$ e $c = -1$ para dar exemplo de duas funções semicontínuas (uma superiormente e outra inferiormente) cuja soma não é semicontínua. Mostre que se f é semicontínua superiormente, $-f$ é inferiormente.

i) Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ semicontínuas superiormente num ponto. Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, então o produto $f \cdot g$ é uma função semicontínua superiormente no mesmo ponto.

j) Quando $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda função semicontínua superiormente $f: X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente e atinge seu valor máximo num ponto de X. Enuncie e prove um fato análogo para semicontinuidade inferior.

Capítulo VIII

Derivadas

Este capítulo é dedicado ao estudo das derivadas de funções reais de uma variável real. Pressupomos que o leitor já tenha estudado, num curso de Cálculo, os aspectos computacionais e as aplicações mais elementares das derivadas. Esperamos, principalmente, que ele esteja familiarizado com o significado geométrico da derivada como coeficiente angular da tangente ao gráfico de uma função.

Embora essas imagens intuitivas não desempenhem papel algum no desenvolvimento lógico do texto, consideramos indispensável a atitude mental de pensar no gráfico de cada função mencionada no presente capítulo. Do contrário, seria difícil imaginar soluções para os exercícios propostos e entender o significado das proposições e dos exemplos. Até mesmo o próprio conceito de derivada se tornaria artificial e injustificado.

1 Definição e propriedades da derivada num ponto

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ (isto é, a é um ponto de acumulação de X pertencente a X).

Diremos que f é *derivável* no ponto a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

No caso afirmativo, o limite $f'(a)$ chama-se a *derivada* de f no ponto a.

Bem entendido, a função $q\colon x \mapsto [f(x) - f(a)]/(x - a)$ é definida no conjunto $X - \{a\}$. Geometricamente, $q(x)$ representa a inclinação (ou coeficiente angular) da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. A reta que passa pelo ponto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ e tem inclinação igual a $f'(a)$ chama-se a *tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. A inclinação da tangente é, portanto, o limite das inclinações das retas secantes passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ quando $x \to a$.

Escrevendo $h = x - a$, ou $x = a + h$, a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ torna-se o limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Agora, a função $h \mapsto [f(a+h) - f(a)]/h$ é definida no conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} - \{0\};\ a + h \in X\}$, o qual tem 0 como ponto de acumulação.

Quando $a \in X \cap X'_+$ (isto é, quando a é um ponto de acumulação à direita de X, e a ele pertence), podemos definir a *derivada à direita* da função f no ponto a, como sendo o limite (se existir):

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Analogamente se define a derivada à esquerda, $f'_-(a)$ quando a é um ponto de acumulação à esquerda, que pertence ao domínio de f.

Evidentemente, quando $a \in X$ é ponto de acumulação à direita e à esquerda (exemplo mais importante: $a \in \operatorname{int}(X)$) então $f'(a)$ existe se, e somente se, existem, e são iguais, as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Por exemplo, quando se diz que uma função $f\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo compacto, é derivável num ponto $a \in [c,d]$ isto significa, no caso de $a \in (c,d)$, que f possui as duas derivadas laterais no ponto a e elas são iguais. No caso de a ser um dos extremos, isto quer dizer apenas que existe, no ponto a, aquela derivada lateral que faz sentido.

Observação: Segue-se das propriedades gerais do limite que $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a se, e somente se, dada qualquer seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a).$$

Mais geralmente, seja dada qualquer função $g\colon Y \longrightarrow X \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{y\to b} g(y) = a$, com $b \in Y'$. Se $y \neq b \Rightarrow g(y) \neq a$ então temos

$$\lim_{y\to b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} = f'(a).$$

Exemplos.

1. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. (A derivada de uma constante é nula.)

2. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cx + d$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(a) = c(x - a)$, de modo que o quociente $[f(x) - f(a)]/(x - a) = c$ é constante e, assim sendo, $f'(a) = c$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

3. Seja $f(x) = x^2$. Então $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, de modo que $[f(a + h) - f(a)]/h = 2a + h$ e assim $f'(a) = \lim_{h\to 0}(2a + h) = 2a$.

4. Usando a fórmula do binômio de Newton se mostra, como acima, que se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ é um polinômio então,

$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Então, para $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \pm 1 (+1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0)$. Segue-se que existem $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$ mas não existe $f'(0)$. Para $a \neq 0$, entretanto, existe $f'(a)$, que vale 1 se $a > 0$ e -1 se $a < 0$.

6. Seja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Para todo $a \in (0, +\infty)$ e $h \neq 0$, temos

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

Portanto, se $a > 0$ existe $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Entretanto, no ponto $a = 0$, temos

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

logo não existe o limite quando $h \to 0$, ou seja, a função $f(x) = \sqrt{x}$ não possui derivada no ponto 0.

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \inf\{|x - n|;\ n \in \mathbb{Z}\}$ ou seja, $f(x)$ é a distância de x ao inteiro mais próximo. Então, se $x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x - n$. Por outro lado, se $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right]$, $f(x) = n + 1 - x$. O gráfico de f é uma serra cujos dentes têm pontas nos pontos $\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Existe a derivada de f em cada ponto do intervalo $\left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ e é igual a 1. Para cada $a \in \left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$ também existe a derivada

$f'(a) = -1$. Nos pontos n e $n + \frac{1}{2}$, com $n \in \mathbb{Z}$, existem apenas as derivadas laterais mas são diferentes.

Observação: Sendo definida como um limite, a derivada tem caráter *local*. Assim, se a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $a \in X \cap X'$ então, dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y \cap Y'$, a função $g = f|Y$ também tem derivada no ponto a, sendo $g'(a) = f'(a)$. Se $Y = I \cap X$, onde I é um intervalo aberto contendo o ponto a, então vale também a recíproca: a existência de $g'(a)$ implica a existência de $f'(a)$.

Diremos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *derivável no conjunto* X quando existir a derivada de f em todos os pontos $a \in X \cap X'$.

Interpretaremos agora a existência da derivada $f'(a)$ como significando que, nas proximidades de a, a função f se exprime como um polinômio de grau ≤ 1 mais um resto que é "muito pequeno" num sentido bem preciso.

Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $a \in X \cap X'$, escreveremos $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Então para todo $h \neq 0$, tal que $a + h \in X$ teremos

$$(1) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h), \qquad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Por causa da relação $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, diz-se que o "resto" $r(h)$ tende para zero mais rapidamente do que h. Diz-se também que $r(h)$ é um infinitésimo (= função cujo limite é zero) de ordem superior a 1, relativamente a h.

Reciprocamente, dada f, suponhamos que exista uma constante L tal que se possa escrever

$$(2) \quad f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h), \qquad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

(Bem entendido, a primeira igualdade sempre pode ser escrita: ela é apenas a definição de $r(h)$. O crucial é saber se

$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.) Neste caso, tem-se

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L + \frac{r(h)}{h}$$

e, portanto, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$, isto é, existe a derivada $f'(a)$ e é igual a L.

A condição (2) é portanto necessária e suficiente para a existência da derivada $f'(a)$. A constante L, se existir com aquela propriedade, é única e igual a $f'(a)$.

As condições (1) e (2) são pois eqüivalentes. Elas podem ainda ser escritas sob a forma

$$(3) \quad f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho(h)]h, \qquad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$

A função ρ será definida para todo h tal que $a + h \in X$ (inclusive $h = 0$). Para $h \neq 0$, teremos

$$\rho(h) = \frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a).$$

Para $h = 0$, poremos $\rho(h) = 0$. Assim a continuidade da função ρ no ponto 0 equivale à existência da derivada $f'(a)$.

Considerações análogas podem ser feitas quanto às derivadas laterais. Basta supor $h > 0$ para a derivada à direita e $h < 0$ no caso de derivada à esquerda.

Exemplos.

8. Temos $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$. Aqui $f(x) = x^2$, $f'(a) = 2a$ e $r(h) = h^2$. Ao darmos um pequeno acréscimo h ao ponto a, o acréscimo sofrido por seu quadrado, isto é $(a+h)^2 - a^2$, é essencialmente igual a $2a \cdot h$ $(= f'(a) \cdot h)$ já que o resto h^2 é desprezível em relação a h (se h é muito pequeno).

9. Sabe-se do Cálculo que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, possui, em todo ponto $a \in \mathbb{R}$, a derivada

$f'(a) = \cos a$. Então podemos escrever $\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a + h \cdot \cos a + r(h)$, onde $\lim \frac{r(h)}{h} = 0$. Portanto, para valores muito pequenos de h, temos aproximadamente $\operatorname{sen}(a+h) \sim \operatorname{sen} a + h \cdot \cos a$, com erro igual a uma fração pequena de h. (O número $\rho(h)$ fornece a razão entre o erro $r(h)$ e o acréscimo h.) Compare com a fórmula da Trigonometria: $\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cdot \cos h + \cos a \cdot \operatorname{sen} h$. Obtemos $r(h) = \operatorname{sen} a \cdot (\cos h - 1) + \cos a \cdot (\operatorname{sen} h - h)$. Isto confirma que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Com efeito, $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1\right) = 0$ como resulta do cálculo das derivadas de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ no ponto 0.

A expressão $f'(a) \cdot h$, que fornece uma boa aproximação para o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ quando h é pequeno, é chamada a *diferencial* de f no ponto a. Observe que a diferencial é uma função de h (e do ponto a). Escreve-se, às vezes, $df(a) = f'(a) \cdot h$.

Estabeleceremos agora as propriedades mais básicas para a derivada num ponto. Em primeiro lugar, mostraremos que não pode existir a derivada num ponto onde a função é descontínua.

Teorema 1. *Se existe a derivada $f'(a)$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Se existe o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ então existe também o limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = 0.\end{aligned}$$

Logo f é contínua no ponto a.

Observação: 1. Se existe apenas uma derivada lateral, f pode ser descontínua no ponto a. Por exemplo: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$f(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -1$ se $x < 0$. Neste caso, $f'_+(0) = 0$ mas $f'_-(0)$ não existe. Entretanto, o mesmo argumento acima mostra que se $f'_+(0)$ existe então f é *contínua à direita* no ponto a, isto é, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Do mesmo modo, a existência da derivada à esquerda, $f'_-(0)$ implica que f é *contínua à esquerda* neste ponto, ou seja, $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$. Em particular, para que f seja contínua no ponto a, basta que existam as duas derivadas laterais, mesmo sendo diferentes. No exemplo que acabamos de dar, a função f é contínua à direita e descontínua à esquerda no ponto 0. Assim sendo, a derivada $f'_-(0)$ não existe.

2. Os Exemplos 5, 6 e 7 acima mostram que uma função pode ser contínua em toda a reta e não ser derivável em alguns pontos. É possível construir uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, que não possui derivada em ponto algum da reta. Veja o livro *Espaços Métricos*, do autor, Exemplo 33 do Capítulo 7, onde se mostra que a maioria das funções contínuas não possui derivada em nenhum ponto.

Teorema 2. *Sejam* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *deriváveis no ponto* $a \in X \cap X'$. *Então* $f \pm g$, $f \cdot g$ *e* f/g *(caso* $g(a) \neq 0$*) são deriváveis nesse mesmo ponto. Tem-se*

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a)\\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Demonstração. Consulte qualquer livro de Cálculo.

Corolário. *Se* $c \in \mathbb{R}$ *então* $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. *Se* $f(a) \neq 0$ *então* $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$.

Teorema 3. (Regra da cadeia). *Sejam* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. *Se existem* $f'(a)$ *e* $g'(b)$ *então* $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* a, *valendo* $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho] \cdot h, & \text{onde} \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0, \\ g(b+k) = g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot k, & \text{onde} \quad \lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0. \end{cases}$$

Estamos escrevendo, por simplicidade, ρ e σ em vez de $\rho(h)$ e $\sigma(k)$ respectivamente. Pondo

$$k = f(a+h) - f(a) = [f'(a) + \rho] \cdot h, \text{ temos } f(a+h) = b + k$$

e

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) = g[f(a+h)] = g(b+k) &= g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot k \\ &= g(b) + [g'(b) + \sigma] \cdot [f'(a) + \rho] \cdot h \\ &= g(b) + [g'(b) \cdot f'(a) + \theta] \cdot h, \end{aligned}$$

com $\theta(h) = \sigma(f(a+h) - f(a)) \cdot [f'(a) + \rho(h)] + g'(b) \cdot \rho(h)$. Como f é contínua no ponto a e σ é contínua no ponto 0, temos $\lim_{h \to 0} \sigma(f(a+h) - f(a)) = 0$ logo $\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0$, o que prova o teorema.

Corolário. (Derivada de uma função inversa.) *Seja* $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ *uma função que possui inversa* $g = f^{-1}\colon Y \to X \subset \mathbb{R}$. *Se* f *é derivável no ponto* $a \in X \cap X'$ *e* g *é contínua no ponto* $b = f(a)$ *então* g *é derivável no ponto* b *se, e somente se,* $f'(a) \neq 0$. *No caso afirmativo,* $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Observação: A continuidade de g no ponto b será conseqüência da continuidade de f no ponto a quando f for contínua em todos os pontos de X e, além disso, X for um intervalo ou X for compacto.

Vejamos a demonstração do corolário. Como g é contínua no ponto b, temos $\lim_{y\to b} g(y) = g(b) = a$. Além disso, $y \in Y-\{b\} \Rightarrow g(y) \neq a$. Logo

$$\lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \lim_{y\to b} \frac{g(y)-a}{f(g(y))-f(a)}$$
$$= \lim_{y\to b} \left[\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Logo $g'(b)$ existe e é igual a $1/f'(a)$ quando $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, se existe $g'(b)$, então, como $g \circ f = id_X$, a regra da cadeia nos dá $g'(b) \cdot f'(a) = 1$, e, portanto, $f'(a) \neq 0$, com $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Exemplo 10. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, é uma bijeção contínua, com inversa contínua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Tem-se $f'(a) = 3a^2$. Logo $f'(a) \neq 0$ para $a \neq 0$ mas $f'(0) = 0$. Logo g não possui derivada no ponto $0 = f(0)$. Para $a \neq 0$ e $b = a^3$ o corolário acima nos dá $g'(b) = \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$ fórmula que, evidentemente, não faz sentido para $b = 0$.

A derivada é o instrumento por excelência para estudar o crescimento de uma função na vizinhança de um ponto. O teorema seguinte e seu corolário nos dão uma indicação de como isto é feito. Resultados "globais", que levam em conta a existência da derivada em todos os pontos de um intervalo, serão estabelecidos no parágrafo seguinte.

Diz-se que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ possui um *máximo local* no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$. Quando vale a implicação $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a)$, dizemos que f possui um máximo local *estrito* no ponto a. Definições análogas podem ser dadas para um *mínimo local* e para um *mínimo local estrito*.

Exemplo 11. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, possui um mínimo local estrito no ponto 0. A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, possui máximos locais estritos nos pontos $(4k+1)\frac{\pi}{2}$ e mínimos locais estritos nos pontos $(4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Uma função constante possui máximo local e mínimo local (não-estritos) em cada ponto do seu domínio. Já $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $h(x) = -1$ se $x < 0$ tem um máximo local (não-estrito) no ponto 0, o qual não é um mínimo local. A função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, é contínua e possui um mínimo não-estrito no ponto 0. Tem-se $\varphi(x) \geq 0$ para todo x, $\varphi(0) = 0$ e em qualquer vizinhança de 0 há pontos x tais que $\varphi(x) = 0$.

Se uma função não-decrescente $f\colon X \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto a, deve ser $f'(a) \geq 0$ porque para todo $x \neq a$ tem-se $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Analogamente, se existe $f'(a)$ e f é não-crescente, então $f'(a) \leq 0$. Observe que f crescente não assegura $f'(a) > 0$, como mostra a função crescente $f(x) = x^3$, para a qual se tem $f'(0) = 0$. Note-se ainda que (sendo $a \in X$ ponto de acumulação dos dois lados), para garantir $f'(a) \geq 0$ basta supor que $x < a < y \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$, isto é, que f assume valores $f(x) \leq f(a)$ nos pontos x à esquerda de a e valores $f(y) \geq f(a)$ nos pontos y à direita de a. Isto não significa necessariamente que f seja crescente, pois é uma condição na qual apenas o ponto a é tomado como centro de referência. (Veja o Exemplo 12 abaixo.) Mostraremos agora que, reciprocamente, o sinal da derivada fornece informações sobre a variação da função.

Teorema 4. *Seja* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *derivável à direita no ponto* $a \in X \cap X'_+$. *Se* $f'_+(a) > 0$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$.

Demonstração. Temos $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) > 0$. Pelo Corolário 1 do Teorema 5, Capítulo VI (veja também a observação em seguida ao Teorema 10 do mesmo capítulo), existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a+\delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, e, portanto, $f(x) - f(a) > 0$, como queríamos demonstrar.

Observação: Trocando-se os sinais $>$ e $<$, $+$ e $-$, obtêm-se mais três teoremas análogos a este, com demonstrações semelhantes. O primeiro diz que se $f'_-(a) > 0$, então $f(x) < f(a)$ para todo $x < a$ e suficientemente próximo de a. O segundo afirma que se $f'_+(a) < 0$ então para qualquer $x > a$ suficientemente próximo de a tem-se $f(x) < f(a)$. Finalmente, se $f'(a^-) < 0$, então $f(x) > f(a)$ para todo $x < a$ suficientemente próximo de a. (Em todos estes casos, bem entendido, estamos supondo $x \in X$.) Evidentemente, se existe a derivada $f'(a)$ então $f'(a) > 0$ implica uma afirmação bilateral como a do corolário seguinte:

Corolário 1. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ possui, no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, e $a-\delta < x < a < y < a+\delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Corolário 2. *Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.*

Com efeito, se fosse $f'(a) > 0$ o corolário 1 excluiria a existência de máximo ou mínimo local no ponto a. Um análogo do mesmo corolário também diria que não pode ser $f'(a) < 0$. Logo, deve ser $f'(a) = 0$.

Exemplos.

12. A conclusão do Teorema 4 não implica que exista um intervalo à direita de a no qual f seja crescente, como também o

Corolário 1 não diz que $f'(a) > 0$ implica f ser crescente numa vizinhança de a. Vejamos um exemplo sobre isto. A função $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} (x \neq 0)$, $f(0) = 0$, é contínua em toda a reta e possui derivada $f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}$ em todos os pontos $x \neq 0$. Mas $f'(0)$ não existe porque $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não possui limite quando $x \to 0$. Consideremos então a função $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ quando $x \neq 0$ e $g(0) = 0$. Novamente, g é contínua em toda a reta e, para $x \neq 0$, tem-se $g'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Não existe $\lim_{x \to 0} g'(x)$ mas não faz mal. Não é assim que se define $g'(0)$. Temos $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Logo $g'(0) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$. Assim, g possui derivada em todos os pontos da reta. Ainda não é g, porém, a função que desejamos. Tomaremos $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ se $x \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$. Vemos, como acima, que φ é contínua e possui derivada em todos os pontos da reta. No ponto que nos interessa, $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$. O Teorema 4 nos assegura a existência de um $\delta > 0$ tal que $0 < x < \delta \Rightarrow \varphi(x) > 0$ e $-\delta < x < 0 \Rightarrow \varphi(x) < 0$. Note porém que φ não é crescente em vizinhança alguma de 0 pois, sendo $\varphi'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$, se tomarmos x muito pequeno com $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ e $\cos \frac{1}{x} = 1$ teremos $\varphi'(x) < 0$; se x for escolhido, ainda pequeno, com $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$ e $\cos \frac{1}{x} = 0$, teremos $\varphi'(x) > 0$. Assim existem pontos x arbitrariamente próximos de 0 nos quais $\varphi'(x)$ é positivo ou negativo. Como observamos antes da demonstração do Teorema 4, isto exclui a possibilidade de φ ser monótona numa vizinhança de zero. Nem sequer pode ser φ monótona num intervalo do tipo $(0, \delta)$ ou $(-\delta, 0)$ pois no argumento que acabamos de usar, x pode ter o seu sinal pré-

fixado. Notemos ainda, a propósito deste exemplo, que φ não pode ser injetiva em nenhum intervalo do tipo $(0, \delta)$ ou $(-\delta, 0)$. Com efeito, sendo contínua, φ injetiva num intervalo implicaria φ monótona (Teorema 13, Capítulo VII), o que não ocorre neste caso.

13. A recíproca do Corolário 2 é falsa. A função $f(x) = x^3$ tem derivada nula no ponto 0 mas é crescente em toda a reta, logo não assume máximo nem mínimo em ponto algum. A função $g(x) = |x|$ possui um mínimo no ponto $x = 0$, no qual as derivadas laterais são $g'_+(0) = +1$ e $g'_-(0) = -1$. Assim, no Corolário 2 é necessário que exista a derivada. Finalmente, é essencial para a validez daquele corolário que o ponto a seja ponto de acumulação dos dois lados. Por exemplo, $h\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + x^2$, possui um mínimo ($= 0$) no ponto $a = 0$, mas aí temos $h'(0) = 1$. O motivo é que, sendo 0 ponto de acumulação do domínio de h apenas à direita, a derivada $h'(0)$ é essencialmente uma derivada lateral.

2 Funções deriváveis num intervalo

Se quiséssemos prosseguir considerando funções definidas em subconjuntos arbitrários de $\mathbb{R}$ teríamos que tomar, nos próximos teoremas, um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ tal que todo ponto $x \in X$, com exceção de $a = \inf X$ e $b = \sup X$, fosse ponto de acumulação de x à esquerda e à direita e, além disso, $X \neq \{a, b\}$. Ora, um tal conjunto coincide com o intervalo $[a, b]$. (De fato, o aberto $\mathbb{R}-X$ é reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Dois deles são $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$. Se (c, d) fosse outro intervalo componente de $\mathbb{R} - X$, teríamos $c \in X$ mas c não seria ponto de acumulação de X à direita. Também $d \in X$, mas d não seria ponto de acumulação à esquerda de X. Então $(c, d) = (a, b)$, o que é absurdo pois $X \cap (c, d) = \emptyset$, enquanto $X \cap (a, b) \neq \emptyset$.)

Quando a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo I, considera-se a *função derivada* $f'\colon I \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$. Quando f' é contínua,

diz-se que f é uma função *continuamente derivável* no intervalo I, ou uma função *de classe* C^1. Isto nem sempre ocorre: a função derivada não precisa ser contínua.

Exemplo 14. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Sua derivada $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f'(0) = 0$. Vê-se que f' é descontínua no ponto 0. Logo f não é de classe C^1 em toda a reta.

Quando uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 no intervalo I, dados $a < b$ em I, se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in I$, com $a < c < b$, tal que $f'(c) = d$. Isto decorre do Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas aplicado à derivada f'.

Acontece, porém, algo surpreendente. A derivada f' não precisa ser contínua. O teorema abaixo, devido a Darboux, nos diz que se f é derivável em $[a, b]$, sua derivada f', mesmo sendo descontínua, cumpre a condição do valor intermediário.

Teorema 5. (Valor intermediário para a derivada.) *Seja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivável em todos os pontos* $x \in [a, b]$. *Se* $f'(a) < d < f'(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = d$.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso $d = 0$, isto é, $f'(a) < 0 < f'(b)$. Então, pelo Teorema 4, teremos $f(a) > f(x)$, para x próximo de a, e $f(x) < f(b)$, para x próximo de b. Por conseguinte, o mínimo de f em $[a, b]$ (que existe em virtude do Teorema de Weierstrass, pois f é contínua no compacto $[a, b]$) é atingido num ponto $c \in (a, b)$. Pelo Corolário 2 do Teorema 4, temos $f'(c) = 0$. O caso geral se reduz a este considerando-se a função auxiliar $g(x) = f(x) - d \cdot x$. Evidentemente $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = d$ e $g'(a) < 0 < g'(b) \Leftrightarrow f'(a) < d < f'(b)$.

Corolário. *Se* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *é derivável num intervalo* I, *então* f' *não pode ter descontinuidade de primeira espécie em* I.

Para demonstrar o corolário, seja $c \in I$ um ponto no qual tenha sentido limite à direita (isto é, c não é a extremidade

superior de I). Se existir $L = \lim_{x \to c^+} f'(x)$, mostraremos que se terá necessariamente $L = f'(c)$. Com efeito, se fosse, por exemplo, $L > f'(c)$, tomaríamos d satisfazendo $f'(c) < d < L$. Existiria $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad c < x < c + \delta \Rightarrow d < f'(x).$$

Em particular, $f'(c) < d < f'\left(c + \frac{\delta}{2}\right)$ mas, em contradição com o Teorema 5, segue-se de (*) que não existiria $x \in \left(c, c + \frac{\delta}{2}\right)$ com $f'(x) = d$. De maneira análoga se mostra que a existência de $\lim_{x \to c^-} f'(x) = M$ obriga $M = f'(c)$. Logo, só existem ambos os limites laterais da derivada quando esta é contínua.

Exemplo 15. Pelo que acabamos de ver, as descontinuidades de uma função derivada num intervalo são bem complicadas. (Veja o Exemplo 14.) Não se deve confundir o exemplo da função $f(x) = |x|$ com um contra-exemplo ao corolário acima. Neste caso, temos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sua derivada $f'\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por $f'(x) = -1$ se $x < 0$, $f'(x) = 1$ se $x > 0$. O ponto 0 *não é* uma descontinuidade de primeira espécie para f'. O que ocorre é que $f'(0)$ simplesmente não existe. O corolário do Teorema 5 nos diz que, seja qual for a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g|(\mathbb{R} - \{0\}) = f'$, g não é derivada de função alguma derivável em toda a reta. Analogamente, a função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \notin \mathbb{Q}$, não é derivada de uma função $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Com efeito, muito embora as descontinuidades de φ sejam todas de segunda espécie, ela transgride violentamente a Lei do Valor Intermediário.

Teorema 6. (Rolle.) *Seja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua, tal que* $f(a) = f(b)$. *Se* f *é derivável em* (a, b) *então existe um ponto* $c \in (a, b)$ *onde* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se f é constante em $[a, b]$ então $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. Caso contrário, f atingirá seu mínimo m ou seu máximo M num ponto interior $c \in (a, b)$, pois se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos $m = M$ e f seria constante. Pelo Corlário 2 do Teorema 4, temos $f'(c) = 0$. (O máximo e o mínimo de f em $[a, b]$ são atingidos, em virtude do Teorema de Weierstrass, pois f é contínua no compacto $[a, b]$.)

Exemplos.

16. Seja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$. Então $f(0) = f(1)$ e f é derivável em $(0, 1)$ mas $f'(x) = 1$ para $0 < x < 1$ qualquer. Isto se dá porque f não é contínua em $[0, 1]$.

17. Seja agora $g\colon [-1, +1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Temos g contínua em $[-1, +1]$, $g(-1) = g(1)$, mas não existe $c \in (-1, +1)$ tal que $g'(c) = 0$. O motivo é que g não tem derivada no ponto 0.

18. Seja $f\colon [-1, +1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Então f é contínua em $[-1, +1]$ mas é derivável apenas no intervalo aberto $(-1, +1)$. Ainda assim podemos aplicar o Teorema de Rolle. No ponto $x = 0$, temos $f'(0) = 0$. Observação análoga vale para a função $g\colon [-1, +1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1 - x^2) \operatorname{sen} \frac{1}{1 - x^2}$ se $|x| \neq 1$, $g(\pm 1) = 0$. Agora, se considerarmos $h\colon [-1, +1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{1 - x^2}$ se $|x| \neq 1$ e $h(-1) = h(+1) = 0$, vemos que o Teorema de Rolle, conforme enunciado acima, não se aplica, pois h é descontínua nos pontos -1 e $+1$. Entretanto existem infinitos pontos em $(-1, +1)$ nos quais a derivada de h se anula.

Observação: A hipótese de f ser contínua em $[a, b]$ mas derivável apenas em (a, b) é feita porque as derivadas $f'(a)$ e $f'(b)$ não intervêm na demonstração. Isto se revelará útil no Corolário 4 do Teorema 7. Veja, porém, a observação seguinte ao Exemplo 20.

Teorema 7. (Teorema do Valor Médio, de Lagrange.) *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *é derivável em* (a,b), *existe* $c \in (a,b)$, *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Um enunciado equivalente seria: Seja $f\colon [a, a+h] \to \mathbb{R}$ *contínua, derivável em* $(a, a+h)$. *Existe* t, $0 < t < 1$, *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+th)\cdot h.$$

Demonstração. Seja $g(x)$ o polinômio de grau ≤ 1 tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então $g'(x)$ é constante e, de fato, $g'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$. A função $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a,b)$, tal que $\varphi'(c) = 0$, o que dá a conclusão desejada.

Observação: Geometricamente, $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$ significa que a tangente ao gráfico de f no ponto c é paralela à secante que constitui o gráfico de g.

Corolário 1. *Se uma função contínua* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *possui derivada nula em todos os pontos* $x \in (a,b)$ *então* f *é constante.*

Com efeito, para todo $x \in (a,b]$, temos $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ onde $c \in (a,x)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) - f(a) = 0$, isto é, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a,b]$ e, portanto, f é constante.

Corolário 2. *Se* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas, deriváveis em* (a,b), *e* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (a,b)$ *então existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = f(x) + c$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Com efeito, podemos aplicar o corolário anterior à diferença $g - f$.

Observação: A função $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, não é constante, embora cumpra $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. O motivo é que o domínio de f não é um intervalo.

Corolário 3. *Seja* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável no intervalo aberto* I. *Se existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f'(x)| \leq k$ *para todo* $x \in I$ *então, quaisquer que sejam* $x, y \in I$, *tem-se*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Com efeito, dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujas extremidades são x e y e é derivável no intervalo aberto correspondente. Logo, $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$, onde z é um ponto entre x e y. Como $|f'(z)| \leq k$, vem $|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq k \cdot |x - y|$.

Assim, uma função que possui derivada limitada num intervalo aberto é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua nesse intervalo. Em particular, se $I = (a, b)$, existem $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$. (Corolário do Teorema 16, Capítulo VII.)

Por exemplo, a função $f\colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, não possuindo limite à direita no ponto 0, tem derivada ilimitada em qualquer intervalo do tipo $(0, \delta)$. Sabemos que, para $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$.

Observação: Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), segue-se por passagem ao limite que a desigualdade $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ ainda é válida para $x, y \in [a, b]$, desde que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$.

Corolário 4. *Seja* f *contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Se existe* $\lim_{x \to a^+} f'(x) = L$ *então existe* $f'_+(a)$ *e vale* $f'_+(a) = L$.

Basta mostrar que, dada arbitrariamente uma seqüência de pontos $x_n > a$ com $\lim x_n = a$, tem-se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = L$. Ora, pelo Teorema do Valor Médio, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe y_n, com $a < y_n < x_n$, tal que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(y_n).$$

É evidente que $y_n \to a$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} f'(y_n) = L$, o que fornece o resultado desejado.

Evidentemente, um enunciado análogo é válido para o limite à esquerda no ponto b. Segue-se então o

Corolário 5. *Seja* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivável, exceto, possivelmente, num ponto* $c \in (a, b)$, *onde* f *é contínua. Se existir* $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = L$, *então existirá* $f'(c)$ *e, além disso,* $f'(c) = L$.

Corolário 6. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivável no intervalo* I. *Tem-se* $f'(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$ *se, e somente se,* f *for não-decrescente em* I. *Se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é crescente em* I. *Neste caso,* f *possui uma inversa* f^{-1}, *definida no intervalo* $f(I) = J$, *a qual é derivável em* J, *com* $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ *para todo* $y = f(x) \in J$.

Com efeito, se for $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ então, dados $a < b$ em I, teremos $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$, com $a < c < b$. Logo $f(b) - f(a) \geq 0$, e, portanto, f é não-decrescente. Reciprocamente, se f é não-decrescente então, para todo $x \in I$ e todo $h \neq 0$ tal que $x + h \in I$, teremos $[f(x+h) - f(x)]/h \geq 0$, logo $f'(x) \geq 0$. Se for $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então $a < b$ em I implica $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ com $a < c < b$, logo $f(b) - f(a) > 0$ isto é, f é crescente. Segue-se do Teorema 13, Capítulo VII, que $f^{-1}\colon J \to I$ é contínua no intervalo $J = f(I)$. Pelo corolário do Teorema 3, a função f^{-1} é derivável e sua derivada tem o valor acima enunciado.

Evidentemente, vale um resultado análogo para funções não-crescentes e decrescentes, com $\leq$ e $<$. Note-se enfaticamente, porém, que f estritamente crescente pode ter derivada igual a zero em alguns pontos, como é o caso de $f(x) = x^3$.

Exemplos.

19. Sabe-se do Cálculo que a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ possui derivada $f'(x) = e^x$. Dado $x > 0$, o Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[0, x]$, sob a forma

$f(x) = f(0) + f'(c)(x-0)$, $0 < c < x$, nos dá $e^x = 1 + e^c \cdot x$. Mas $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$. Logo, podemos escrever $e^x > 1 + x$ para todo $x > 0$. Esta simples conseqüência do Teorema do Valor Médio tem uma aplicação interessante. A partir daí, mostraremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Com efeito, temos $e^{x/n+1} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}$ se $x > 0$. Elevando à potência $n+1$ e escrevendo $A = (n+1)^{n+1}$, obtemos

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{A}, \quad \text{donde} \quad \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}.$$

O resultado segue-se. Daí é fácil concluir, mais geralmente, que se tem $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ qualquer que seja o polinômio p. Com efeito, se $a_n x^n$ é o termo de mais alto grau do polinômio p, sabe-se que $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x^n} = a_n$. Logo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{e^x} = a_n \cdot 0 = 0.$$

20. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Como $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, vemos que f é contínua. Além disso, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$, com $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}$ para todo $x \neq 0$. Pondo $y = \frac{1}{x}$, vemos que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0$ em virtude do exemplo anterior. Se fizermos x tender para zero por valores negativos, isto apenas trocará o sinal de $f'(x)$, logo vale ainda $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Segue-se do Corolário 5 acima que existe $f'(0)$ e tem-se $f'(0) = 0$. Usando o mesmo argumento, podemos examinar a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^{-1/x}$ para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$. No ponto 0, g é descontínua, porém é contínua à direita. Para todo $x \neq 0$ temos $g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x}$. Segue-se que $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ e, portanto, existe $g'_+(0) = 0$. Entretanto $\lim_{x\to 0^-} g'(x) = +\infty$.

Observação: Há duas situações nas quais vale o Teorema do Valor Médio sem se supor que a função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ seja contínua nos pontos a e b. A primeira delas é completamente trivial: basta admitir que existam $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $M = \lim_{x \to b^-} f(x)$. Então a fórmula se torna $M - L = f'(c) \cdot (b - a)$ e se terá $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ contanto que $M - L = f(b) - f(a)$. Isto decorre imediatamente do Teorema 7 no qual usamos, em vez de f, uma função que coincide com f em (a, b) mas assume os valores L e M respectivamente nos pontos a e b.

A segunda situação é a seguinte. Admitimos que $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ seja limitada, derivável em (a, b), mas supomos que pelo menos um dos limites nas extremidades, digamos $\lim_{x \to a^+} f(x)$, não exista. Então ainda existe um $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$.

Com efeito, a não existência do limite à direita no ponto a mostra (veja os comentários em seguida ao Corolário 3) que $f'(x)$ não pode ser limitada em (a, b). Afirmamos que f' é ilimitada superior e inferiormente. Pois supondo que $f'(x) \geq A$ (digamos) para todo $x \in (a, b)$, a função $g(x) = f(x) - Ax$ teria derivada não-negativa em (a, b), seria monótona limitada e existiria seu limite à direita no ponto a, o que é absurdo pois isto implicaria na existência de $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Em particular, pondo $d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$, vemos que existem pontos x_1, x_2 em (a, b) nos quais $f'(x_1) < d$ e $f'(x_2) > d$. Pelo Teorema do Valor Intermediário para a derivada, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$, isto é, $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Como aplicação do Teorema do Valor Médio, caracterizaremos as funções uniformemente deriváveis.

Diremos que $f: I \to \mathbb{R}$ é *uniformemente derivável* no intervalo I quando f for derivável em I e, além disso, para cada $\varepsilon > 0$ dado for possível obter $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \text{ se } x \in I, \ x+h \in I.$$

Uma condição equivalente seria: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| < \varepsilon|h|$, para $x \in I$, $x + h \in I$ quaisquer.

Teorema 8. *Uma função* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uniformemente derivável se, e somente se, é de classe* C^1.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $f \in C^1$, isto é, que $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua (e, portanto, uniformemente contínua, pois $[a,b]$ é compacto). Então, dado $\varepsilon > 0$, obtemos $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta \Rightarrow |f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$. Ora, $f(x+h) - f(x) = f'(y) \cdot h$, onde $|x - y| < |h|$. Portanto, $0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| = |f'(y) \cdot h - f'(x) \cdot h| = |f'(y) - f'(x)||h| < \varepsilon|h|$. Logo f é uniformemente derivável. Tomemos agora este fato como hipótese e provemos que f' é (uniformemente) contínua em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta$ e $x \in I$, $x+h \in I$ implicam $\left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x)\right| < \varepsilon/2$ e $\left|\frac{1}{-h}[f(x) - f(x+h)] - f'(x+h)\right| < \varepsilon/2$. A segunda desigualdade escreve-se como $\left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x+h)\right| < \varepsilon/2$. Comparando-a com a primeira, vem $|f'(x+h) - f'(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $x \in I$, $x + h \in I$, com $0 < |h| < \delta$. Logo f' é uniformemente contínua.

3 Fórmula de Taylor

Seja $n \in \mathbb{N}$. A *n-ésima derivada* (ou *derivada de ordem* n) de uma função f no ponto a é indicada com a notação $f^{(n)}(a)$ e definida indutivamente:

$$\begin{aligned} f''(a) &= [f']'(a), f'''(a) = f^{(3)}(a) \\ &= [f'']'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}]'(a). \end{aligned}$$

Às vezes é conveniente introduzir f como sua própria "derivada de ordem zero" e escreve-se $f^{(0)}(a) = f(a)$, para simplificar as fórmulas.

A fim de que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido, é necessário que $f^{(n-1)}(x)$ esteja definida para todo x num conjunto ao qual a pertença, e do qual seja ponto de acumulação. Em todos os casos abaixo, tal conjunto será um intervalo contendo a.

Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável o intervalo I quando existir $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$. Bem entendido, quando x for uma das extremidades de I, $f^{(n)}(x)$ é uma derivada lateral. Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ é n *vezes derivável no ponto* $a \in I$ quando houver um intervalo aberto J contendo a, tal que f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap J$ e, além disso, existir $f^{(n)}(a)$.

Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n, e escreveremos $f \in C^n$, para significar que f é n vezes derivável em I e $x \mapsto f^{(n)}(x)$ é uma função contínua em I.

Em particular, $f \in C^0$ significa que f é contínua em I.

Exemplos.

21. Para cada $n=0,1,2,\ldots$, consideremos a função $\varphi_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $\varphi_n(x) = x^n|x|$. Para $x \geq 0$, temos $\varphi_n(x) = x^{n+1}$ e se $x < 0$ vale $\varphi_n(x) = -x^{n+1}$. Evidentemente, $\varphi_n' = (n+1)\cdot\varphi_{n-1}$. Logo a n-ésima derivada de φ_n é igual a $(n+1)!\varphi_0$. Como $\varphi_0(x) = |x|$ é contínua mas não possui derivada no ponto 0, concluímos que cada uma das funções φ_n é de classe C^n, mas não é $n+1$ vezes derivável. Em particular, $\varphi_n \notin C^{n+1}$.

22. Seja $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^{2n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ se $x\neq 0$, $f_n(0) = 0$. Então f_n é n vezes derivável, mas sua n-ésima derivada (que existe em todo ponto $x \in \mathbb{R}$) não é contínua no ponto 0, logo f não é de classe C^n. Em particular, f_n não é $n+1$ vezes derivável. Por outro lado, se tomarmos $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g_n(x) = x^{2n+1}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$ e $g_n(0) = 0$, então g_n é de classe C^n mas não é $n+1$ vezes derivável no ponto 0.

Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^∞ em I quando $f \in C^n$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Em outras palavras, quando se pode derivar f tantas vezes quantas se deseje, em todos os pontos do intervalo I.

Exemplos.

23. Todo polinômio é uma função de classe C^∞ na reta. Uma função racional (quociente de dois polinômios) é de classe C^∞ em todo intervalo onde é definida. As funções trigonométricas também são de classe C^∞ em cada intervalo onde são definidas. O mesmo se pode dizer para log e para a função exponencial.

24. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é de classe C^∞. Num ponto $x \neq 0$, é claro que existem as derivadas de f de todas as ordens. Resta mostrar que existe $f^{(n)}(0)$ para todo n. É fácil ver que, para $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = p\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot e^{-1/x^2}$, onde p é um polinômio. Pondo $y = 1/x$, temos $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{y \to \pm\infty} p(y)/e^{y^2} = 0$. Logo existe $f^{(n)}(0)$ e é igual a zero (Corolário 5 do Teorema 7).

Quando f é derivável num ponto a, tem-se $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$, onde o "resto" $r(h)$ é um infinitésimo de ordem maior do que 1 em relação a h. Isto quer dizer: $\lim \dfrac{r(h)}{h} = 0$. No caso de f ser n vezes derivável no ponto a, mostraremos que existe um polinômio p de grau $\leq n$ (polinômio de Taylor de f no ponto a) tal que

$$f(a+h) = p(h) + r(h), \qquad \text{onde} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0,$$

isto é, o resto $r(h)$ será um infinitésimo de ordem superior a n em relação a h. Esta fórmula nos diz que uma função n vezes derivável num ponto pode ser bem aproximada por um polinômio de grau $\leq n$ na vizinhança daquele ponto.

No caso $n = 1$, a existência do polinômio $p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h$, de grau ≤ 1 (em relação à variável h), tal que $r(h) =$

$f(a+h) - p(h)$ cumpra $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, é necessária e suficiente para que f seja derivável no ponto a.

Quando $n > 1$, a existência do polinômio p com a propriedade acima decorre de f ser n vezes derivável no ponto a, mas não é suficiente para assegurar essa derivabilidade.

Exemplo 25. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+x+(x-a)^2+(x-a)^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$ se $x \neq a$ e $f(a) = 1 + a$. Então $f \in C^\infty$ em $\mathbb{R}-\{a\}$ e $f(a+h) = 1 + a + h + h^2 + h^3 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h} = p(h) + r(h)$, onde $p(h) = 1 + a + h + h^2$ é um polinômio de grau 2 e o resto $r(h) = h^3 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ cumpre a condição $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Entretanto, como $f'(x) = 1+2(x-a)+3(x-a)^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} - (x-a) \cos \frac{1}{x-a}$, vemos que $f''(a)$ não existe.

Antes de prosseguirmos, convém registrar aqui o fato de que um polinômio

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

de grau $\leq n$, fica inteiramente determinado quando se conhecem seu valor e o de suas derivadas, até a ordem n, no ponto 0. Em outras palavras, o conhecimento dos valores $p(0), p'(0), \ldots, p^{(n)}(0)$ determina os valores dos coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Com efeito, basta observar que

$$b_0 = p(0),\ b_1 = p'(0),\ b_2 = \frac{p''(0)}{2}, \ldots, b_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Em geral para $0 \leq i \leq n$, $b_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}$.

Dada uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$, n vezes derivável no ponto $a \in I$, o *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto a é o polinômio

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n.$$

Este é o único polinômio de grau $\leq n$ cujas derivadas (desde a ordem 0 até a ordem n) no ponto 0 coincidem com as derivadas correspondentes de f no ponto a.

Mostraremos agora que a coincidência das derivadas é uma propriedade equivalente ao fato de p aproximar f, na vizinhança do ponto a, a menos de um infinitésimo de ordem superior a n.

Lema. *Seja* $r\colon I \to \mathbb{R}$ n *vezes derivável* ($n \geq 1$), *no ponto* $0 \in I$. *A fim de que* $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$, *é necessário e suficiente que* $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que a condição é necessária. Em primeiro lugar, se $r(0) = r'(0) = 0$ então

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} = \lim \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = r'(0) = 0.$$

Isto prova a necessidade quando $n = 1$. Suponhamo-la demonstrada para $n-1$ ($n > 1$) e consideremos uma função r tal que $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$. A hipótese de indução, aplicada à sua derivada r', nos dá $\lim_{x\to 0} \frac{r'(x)}{x^{n-1}} = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta$ implica $\left|\frac{r'(x)}{x^{n-1}}\right| < \varepsilon$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $0 < |x| < \delta$, então

$$\left|\frac{r(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{r'(c)\cdot x}{x^n}\right| = \left|\frac{r'(c)}{x^{n-1}}\right| = \left|\frac{r'(c)}{c^{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{c}{x}\right|^{n-1} < \varepsilon$$

pois $0 < |c| < |x|$. Logo $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

Agora mostraremos que a condição é suficiente. Novamente usaremos indução. Se $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} = 0$, então $r(0) = \lim_{x\to 0} r(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{r(x)}{x} \cdot x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 0$ e $r'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} = 0$.

Isto prova o caso $n = 1$. Suponhamos demonstrada a suficiência para $n-1$ $(n > 1)$ e consideremos uma função r, n vezes derivável no ponto 0, tal que $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$. Introduzamos $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = r(x) - \frac{r^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Então φ é n vezes derivável no ponto 0 e, além disso, $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n-1}} = 0$. Pela hipótese de indução, concluímos que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$. Mas isto equivale a dizer que $r^{(i)}(0) = 0$ para $0 \leq i \leq n-1$. Um cálculo direto nos fornece $\varphi^{(n)}(0) = 0$. A parte do lema já demonstrada permite então concluir que $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0$. Olhando para a definição de φ e levando em conta que $\lim \frac{r(x)}{x^n} = 0$, concluímos que $r^{(n)}(0) = 0$, o que completa a demonstração.

Dada $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo, seja $a \in I$. Tomemos um polinômio p e escrevamos

$$f(a+h) = p(h) + r(h).$$

Isto define uma função $r\colon J \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o intervalo $J = \{h \in \mathbb{R};\ a+h \in I\}$. Evidentemente, $0 \in J$ e, como $p \in C^\infty$, vemos que f é n vezes derivável no ponto a se, e somente se, r é n vezes derivável no ponto 0. Façamos esta hipótese. Segue-se do Lema que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ se, e somente se, $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$, $0 \leq i \leq n$.

Se impusermos a condição de que o grau de p seja $\leq n$, concluímos que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ se, e somente se, p é o polinômio de Taylor de ordem n para f no ponto a.

Isto demonstra o

Teorema 9. (Fórmula de Taylor infinitesimal). *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ n *vezes derivável no ponto* $a \in I$. *Então, para todo* h *tal que* $a+h \in I$, *tem-se*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n + r(h)$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Além disso, $p(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\cdot h^i$ *é o único polinômio de grau* $\leq n$ *tal que* $f(a+h) = p(h) + r(h)$ *com* $\lim \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Exemplo 26. Consideremos um polinômio p, de grau n. Dados $a, h \in \mathbb{R}$, a fórmula de Taylor infinitesimal nos fornece

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)\cdot h + \frac{p''(a)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n + r(h).$$

Ora, $r(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$, cujas derivadas, desde a ordem 0 até n, se anulam no ponto 0. Logo $r = 0$ e, assim, vale a fórmula de Taylor para polinômios, sem resto. Poderiámos chegar ao mesmo resultado simplesmente notando que $p(a+h) = q(h)$ é um polinômio em h, de grau $\leq n$, tal que $r(h) = p(a+h) - q(h)$ satisfaz trivialmente a condição $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Pela unicidade do polinômio de Taylor, vem

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)\cdot h + \frac{p''(a)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n$$

pois $r(h) = 0$.

Aplicações da fórmula de Taylor

A) *Máximos e mínimos locais*. Seja f n vezes derivável num ponto a, *interior* ao domínio de f. Se $f'(a) = 0$, a chama-se um *ponto*

crítico de f. Suponhamos que $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, mas $f^{(n)}(a)\neq 0$. Afirmamos que:

1.º) Se n for par, então a será um ponto de máximo local se $f^{(n)}(a)<0$, ou um ponto de mínimo local se $f^{(n)}(a)>0$.

2.º) Se n for ímpar, o ponto a não será de máximo nem de mínimo.

Com efeito, a anulação das derivadas de ordem 1 até $n-1$ faz com que a fórmula de Taylor assuma o aspecto

$$f(a+h)=f(a)+\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\rho(h)\right]h^n,$$

onde $\rho(h)=\dfrac{r(h)}{h^n}$. Assim $\lim\limits_{h\to 0}\rho(h)=0$. Decorre daí que, para todo h suficientemente pequeno, o sinal da expressão dentro do colchete será o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Quando n é par, o fator h^n é sempre positivo para $h\neq 0$. Logo, quando n é par, para todo h suficientemente pequeno e diferente de zero tem-se $f(a+h)<f(a)$ se $f^{(n)}(a)<0$ (máximo local estrito) e $f(a+h)>f(a)$ no caso de $f^{(n)}(a)>0$ (mínimo local estrito).

Agora suponhamos n ímpar. O fator h^n tem o sinal de h. Daí resulta que (seja qual for o sinal de $f^{(n)}(a)$), num intervalo suficientemente pequeno em torno de a, a diferença $f(a+h)-f(a)$ não tem sinal constante. Logo não há máximo nem mínimo local neste caso.

Observação: Resulta da fórmula de Taylor (como vimos acima) que se uma seqüência de pontos $x_n\in I-\{a\}$ é tal que $\lim x_n=a$ e $f\colon I\to\mathbb{R}$ cumpre $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=\cdots=f(a)$ então todas as derivadas de f que existam no ponto $a\in I$ são nulas.

Exemplo 27. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ tem um mínimo no ponto 0 se n é par e é crescente se n for ímpar.

B) *Indeterminações do tipo* $\dfrac{0}{0}$. Sejam $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ n vezes de-

riváveis no ponto $a \in I$. Suponhamos que f e g, juntamente com suas derivadas até a ordem $n-1$ (inclusive) se anulam no ponto a mas que $f^{(n)}(a)$ e $g^{(n)}(a)$ não são ambas nulas. Além disso, suponhamos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ suficientemente próximo de a. Neste caso, temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, \quad \text{se } g^{(n)}(a) \neq 0;$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty \quad \text{se } g^{(n)}(a) = 0.$$

Estas conclusões seguem-se imediatamente das igualdades abaixo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \rho(h)\right] h^n}{\left[\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \sigma(h)\right] h^n} = \frac{f^{(n)}(a) + n!\rho(h)}{g^{(n)}(a) + n!\sigma(h)}$$

onde $\lim_{h \to 0} \rho(h) = \lim_{h \to 0} \sigma(h) = 0$.

Veremos agora outra fórmula de Taylor, na qual se estima o valor da diferença $f(a+h) - f(a)$ para um valor fixo de h, (isto é, sem supor $h \to 0$) de modo análogo ao Teorema do Valor Médio, do qual ela é uma generalização. Para isso é preciso supor que $f^{(n)}(x)$ exista em todo o intervalo $(a,\ a+h)$.

Teorema 10. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n-1}, n *vezes derivável no intervalo aberto* (a,b). *Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Pondo $b = a + h$, *isto equivale a dizer que existe* θ, *com* $0 < \theta < 1$, *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} \cdot h^n.$$

Demonstração. Definamos $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, pondo $\varphi(x) = f(b)-f(x)-f'(x)\cdot(b-x)-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-\frac{K}{n!}(b-x)^n$, onde a constante K é escolhida de tal modo que $\varphi(a) = 0$. Então, φ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), com $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Um cálculo simples mostra que

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Isto significa que $K = f^{(n)}(c)$. O teorema está provado.

Ainda há outra fórmula de Taylor, bastante útil, na qual o resto é expresso sob forma de integral. Ela será deduzida no capítulo seguinte, quando estudarmos integração.

Aplicação

C) *Funções convexas*. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo, chama-se *convexa* quando, para $a < x < b$ arbitrários em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está situado abaixo da secante (segmento de reta) que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A equação desta secante pode ser escrita de dois modos:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \quad \text{ou} \quad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b).$$

Dizer que, para $a < x < b$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está abaixo da secante significa, portanto,

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \quad \text{ou}$$
$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b).$$

Assim, afirmar que f é convexa significa dizer que $a < x < b \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Na verdade, basta

uma dessas duas desigualdades para caracterizar a convexidade de f.

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 11. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *duas vezes derivável no intervalo aberto* I. *Para que* f *seja convexa é necessário e suficiente que* $f''(x) \geq 0$, *para todo* $x \in I$.

Demonstração. Suponhamos que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Então, pelo Teorema 10, quaisquer que sejam $a, a+h \in I$, existe c, entre a e $a+h$, com $f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(c)}{2}\cdot h^2$. Como $f''(c) \geq 0$, temos $f(a+h) \geq f(a) + f'(a)\cdot h$. Logo $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq f'(a)$ quando $h > 0$. Equivalentemente: $a < x < b$ em $I \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.

Escrevendo $f(x) = X$, $f(a) = A$ e $f(b) = B$, temos $\frac{X-A}{x-a} \leq \frac{B-X}{b-x}$, ou seja $(X-A)(b-x) \leq (B-X)(x-a)$. Somando $(X-A)(x-a)$ a ambos os membros desta última igualdade, vem

$$(X-A)(b-a) \leq (B-A)(x-a),$$

isto é, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ quando $a < x < b$, o que nos dá a convexidade de f.

Reciprocamente, seja f convexa. Dados $a < b$ em I, tomamos x com $a < x < b$ e temos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Fazendo $x \to a$ na primeira desigualdade e $x \to b$ na segunda, obtemos

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

Logo f' é não-decrescente em I. Segue-se que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Observação: Tomando desigualdade estrita ($<$) em vez de $\leq$ na definição de função convexa, obtemos o conceito de função estritamente convexa. O argumento usado para demonstrar a primeira parte do Teorema 11 mostra que $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ implica que f é estritamente convexa em I. Entretanto a recíproca é falsa. A função $f(x) = x^4$ é estritamente convexa na reta inteira mas $f''(0) = 0$.

Os Exercícios 49 a 52 deste capítulo indicam outra formulação do conceito de função convexa e mostram como a convexidade (da função exponencial) pode ser usada para deduzir desigualdades não-triviais.

4 Série de Taylor, funções analíticas

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se a é interior ao intervalo I e $a + h \in I$, então podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\cdot h+\frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot h^{n-1}+r_n(h),$$

onde $r_n(h) = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta_n h)}{n!} \cdot h^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

A série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$ chama-se a *série de Taylor* da função f em torno do ponto a. Toda função C^∞ num intervalo I possui uma série de Taylor em cada ponto interior $a \in I$. Mas tal série pode convergir ou divergir; e, mesmo quando converge, sua soma pode ser diferente de $f(a+h)$.

Uma função $f: I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I, chama-se *analítica* quando, para cada $a \in I$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que a série de Taylor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$ converge para $f(a+h)$ desde que $|h| < \varepsilon$.

Uma observação elementar, porém crucial, é a seguinte: a fim de que a série de Taylor $\Sigma \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$ convirja para $f(a+h)$ é necessário e suficiente que $\lim_{n\to\infty} r_n(h) = 0$.

Todas as funções "elementares" do Cálculo são analíticas. (Isto é claro para polinômios mas já não é tão fácil de provar para funções racionais.) Voltaremos a tratar de funções analíticas, com mais detalhes, no §4 do Capítulo X.

Daremos agora alguns exemplos com a série de Taylor. É quase sempre uma tarefa enfadonha o cálculo das derivadas sucessivas $f^{(n)}(a)$. Por isso, costuma-se apelar para outros métodos, como a divisão de polinômios, por exemplo. Obtêm-se os coeficientes $f^{(n)}(a)$ através da unicidade da fórmula de Taylor vista acima: se $f(a+h) = p(h) + r(h)$, onde $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ e $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$, então tem-se $p(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i$. [Na realidade, em vez de calcular as derivadas sucessivas para ter a fórmula de Taylor, costuma-se, por esse método, usar a unicidade do polinômio de Taylor a fim de se obterem as derivadas de ordem superior de f, para outros propósitos.]

Exemplos.

28. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, é de classe C^∞ em toda a reta. A fórmula bem conhecida

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

nos dá $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$. Como $1 + x^2 = 1 - (-x^2)$, daí, obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

Portanto,

$$f(x) = f(0+x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Sejam $p(x) = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}$ e $r(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$.

Como $p(x)$ é de grau $\leq 2n-1$ $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^{2n-1}} = 0$, tem-se $p(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$, isto é, a expressão acima é a fórmula de Taylor de f em torno do ponto 0. Em particular, vemos que $f^{(2n-1)}(0) = 0$ e $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Temos $r_{2n-1}(x) = r_{2n}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$. Logo, $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \Leftrightarrow |x| < 1$. Ou seja, a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ em torno do ponto 0 converge, se $|x| < 1$, para $f(x)$ e diverge para $|x| \geq 1$. (Apesar disto, f é analítica em toda a reta. Acontece apenas que a série de Taylor de f em torno de um ponto $a \neq 0$ é outra.)

29. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Então $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. A série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ de f em torno de 0 é identicamente nula e portanto converge para 0, seja qual for x. Como, porém, $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, segue-se que a série de Taylor não converge para o valor da função. Em particular, f não é analítica em intervalo algum contendo 0. [Entretanto, f é analítica em $(0, +\infty)$ e em $(-\infty, 0)$.]

30. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. As derivadas sucessivas de $\operatorname{sen} x$ são iguais a $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $-\cos x$, $\operatorname{sen} x$, etc.

A fórmula de Taylor em torno de 0 fornece

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+2}(x)$$

onde $r_n(x) = \frac{[\operatorname{sen}]^{(n)}(c)}{n!} \cdot x^n$, $|c| < |x|$.

Como a n-ésima derivada de $\operatorname{sen} x$ é $\pm \operatorname{sen} x$ ou $\pm \cos x$, temos

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim (vide o Exemplo 22, Capítulo IV) $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Concluímos, então, que vale o desenvolvimento em série de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ em torno de 0 converge em toda a reta.

Se tomássemos um ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$, o desenvolvimento de Taylor de $\operatorname{sen} x$ em torno de a seria

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a + h\cos a - \frac{h^2}{2}\operatorname{sen} a - \frac{h^3}{3!}\cos a + \frac{h^4}{4!}\operatorname{sen} a + \ldots$$

A série de Taylor acima converge para todo $h \in \mathbb{R}$ pois seu resto ainda tem a mesma forma que o do caso anterior ($a = 0$), apenas com a diferença de que agora deve ser $|c - a| < h$.

Concluímos que a função $\operatorname{sen} x$ é analítica em toda a reta, e mais ainda, que sua série de Taylor em torno de cada ponto a converge para todo valor de h. Evidentemente, considerações análogas podem ser feitas para a função $\cos x$.

Compare com $\frac{1}{1+x^2}$. Esta função é analítica em toda a reta, mas sua série de Taylor em torno de 0 converge apenas no intervalo $(-1, +1)$.

31. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função exponencial: $f(x) = e^x$. Então suas derivadas sucessivas são todas iguais a e^x. A fórmula de Taylor em torno do 0 tem o aspecto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} \quad \text{com} \quad |c_n| < |x|.$$

Evidentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixo, o resto $r_{n+1}(x) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$ tende para 0 quando $n \to \infty$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

A função exponencial é analítica em toda a reta pois, para a e h reais quaisquer, temos $e^{a+h} = e^a \cdot e^h = e^a + e^a \cdot h + e^a \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots$

Exercícios

1. Sejam $f, g, h \colon X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$ então existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.

2. Seja $a \in X$ um ponto de máximo local para a função $f \colon X \to \mathbb{R}$. Se f possui derivada à direita no ponto a, então ela é ≤ 0. Se existir, $f'_-(a)$ deve ser ≥ 0. Dê exemplo de um ponto de máximo local onde existam as duas derivadas laterais e sejam diferentes.

3. Seja $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p''(c) = 0$.

4. Seja $f \colon I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo do qual a é ponto interior. Se f é derivável no ponto a então
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$
A existência do limite acima, entretanto, não implica a continuidade de f no ponto a, nem que exista a derivada $f'(a)$, mesmo quando f é contínua neste ponto.

5. Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $\xi \colon X \to \mathbb{R}$ pondo $\xi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se $x \neq a$ e $\xi(a) = L$. Prove que ξ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

6. Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ um polinômio do 3.º grau com coeficiente líder igual a 1. Mostre que $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo se, e somente se, $a^2 \leq 3b$. Para que o homeomorfismo inverso $f = p^{-1}$ seja derivável é necessário e suficiente que $a^2 < 3b$.

7. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. Se, para cada $x \in I$ (exceto evidentemente a extremidade superior, se ela estiver em I), existir $f'_+(x)$ e for > 0, então f é crescente.

8. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'$. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de pontos em X tais que $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

[*Sugestão*: Note que $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = t_n \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - t_n)\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$ onde $t_n = \frac{y_n - a}{y_n - x_n}$. Observe que $0 \leq t_n \leq 1$ e use o Exercício 18 do Capítulo IV.]

9. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua no ponto a interior ao intervalo I. Suponha que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = L$$

para todo par de seqüências $(x_n), (y_n)$ em I com $x_n < a < y_n$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$. Prove que existe $f'(a)$ e é igual a L. Mostre que a hipótese de f ser contínua no ponto a é indispensável.

10. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$, é derivável. Obtenha seqüências $(x_n), (y_n)$ tais que $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $x_n \neq y_n$, mas não existe $\lim[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n)$.

11. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um *ponto crítico* de f é um ponto $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. O ponto crítico c chama-se *não-degenerado* quando $f''(c)$ existe e é diferente de zero. Então

i) Se f é de classe C^1, para cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$ o conjunto dos pontos críticos de f pertencentes a $[a, b]$ é fechado.

ii) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é derivável. O conjunto dos pontos críticos de f no intervalo $[0, 1]$ não é fechado.

iii) Os pontos de máximos e mínimos locais de f são críticos. Um ponto crítico não-degenerado deve ser de máximo local ou de mínimo local.

iv) Existem funções C^∞ com máximos e mínimos locais isolados degenerados. Existem pontos críticos (necessariamente degenerados) de funções C^∞ que não são máximos nem mínimos locais.

v) Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado para f então existe $\delta > 0$ tal que não há outros pontos críticos de f no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Ou seja: todo ponto crítico não-degenerado é um ponto crítico isolado.

vi) Se os pontos críticos de $f \in C^1$ contidos no intervalo compacto $[a, b] \subset I$ são todos não-degenerados então há apenas um número finito deles. Conclua que f possui no máximo uma infinidade enumerável de pontos críticos não-degenerados em I.

vii) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, possui uma infinidade de pontos críticos não-degenerados no intervalo $[0, 1]$. Por que isto não contradiz o item (vi)?

12. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio. Tem-se $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k)}(a) = 0$ se, e somente se, $p(x) = (x-a)^{k+1} \cdot q(x)$, onde q é um polinômio.

13. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$ então

f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Conseqüentemente, f é constante.

14. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável num intervalo arbitrário I. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ então f é constante.

15. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 num intervalo I. Dado $a \in I$, considere seqüências (x_n) e (y_n) em I, com $x_n \neq y_n$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$. Prove que $\lim \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a)$. Note que a hipótese $f \in C^1$ dispensa a exigência de se ter $x_n < a < y_n$ como no Exercício 8 acima.

16. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Para um certo $a \in I$, suponha que $\lim x_n = \lim y_n = a$ com $x_n \neq y_n$ em I implique $\lim \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$. Prove que f' é contínua no ponto a.

17. Seja $f\colon (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivável. Se existem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = b$ com $a \in \mathbb{R}$, então $b = 0$. [*Sugestão*: $f(n+1) - f(n) = f'(x_n)$ onde $x_n \to \infty$].

18. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b). Suponha $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k \cdot f(c)$. [*Sugestão*: Tome $p(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$ e aplique o Teorema de Rolle].

19. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável num intervalo. Uma *raiz* de f é um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$. Entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f. Use este fato para mostrar que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente uma raiz no intervalo $(1, 3)$.

20. Se $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é derivável e $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então, para cada $c > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x + c) - f(x)] = c \cdot L$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$.

21. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) = f'(b)$, mostre que existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$. Interprete este fato geometricamente. [*Sugestão*: Considere primeiro o caso em que $f'(a) = f'(b) = 0$. Mostre que a função $\xi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $\xi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se $x \neq a$ e $\xi(a) = 0$, atinge seu máximo ou seu mínimo num ponto interior $c \in (a,b)$. Para passar ao caso geral, considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - x \cdot f'(a)$.]

22. Seja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se f'' é limitada e existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, então $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

23. Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis no intervalo (a,b). Então existe $c \in (a,b)$, tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

24. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$, derivável num intervalo I, satisfaz à condição de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, para $x, y \in I$ quaisquer, se, e somente se, $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$.

25. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo fechado I (limitado ou não). Suponha que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, onde c é uma constante tal que $0 \leq c < 1$. Além disso, admita que $f(I) \subset I$. Então, dado qualquer $x_0 \in I$, tem sentido formar a seqüência $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$. Mostre que, seja qual for o ponto inicial x_0 escolhido, existe $\lim x_n = a$ e que $a \in I$ é o único ponto de I tal que $f(a) = a$. (Veja o Exemplo 19, Capítulo IV.)

26. Obtenha uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que $|f'(x)| < 1$ e $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

27. Seja $p \in \mathbb{N}$. Dada $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo fechado I, com $f(I) \subset I$, suponha que $g = f \circ f \circ \cdots \circ f = f^p$ cumpre $|g'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in I$, onde c é constante. Prove que existe um único $a \in I$ tal que $f(a) = a$ e que, para

todo $x \in I$ tem-se $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$ (onde $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, n vezes).

28. Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada, prove que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que a função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x + c \cdot f(x)$, é uma bijeção cuja inversa é derivável.

29. A função $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, não cumpre a condição $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in [0,\pi]$, com $c \in \mathbb{R}$ constante, mas $f^2 = f \circ f$ cumpre.

30. Seja $f\colon [a-\delta, a+\delta] \to \mathbb{R}$ derivável, com $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Se $|f(a) - a| \leq (1-c)\delta$, então existe um único $x_0 \in [a-\delta, a+\delta]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

31. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b). Se $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$.

32. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável e dado $c \in [a,b]$, defina uma função $\xi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo $\xi(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ se $x \neq c$ e $\xi(c) = f'(c)$. Prove que se f é duas vezes derivável no ponto c então existe $\xi'(c)$ e vale $\xi'(c) = \dfrac{f''(c)}{2}$. Dê um exemplo em que existe $\xi'(c)$ mas não existe $f''(c)$.

33. Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^n tais que $f(I) \subset J$ então $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n.

34. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $f''(a)$ existe, calcule $(f^{-1})''$ no ponto $b = f(a)$.

35. Dados $a < b$, defina $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = e^{1/(x-a)(x-b)}$ se $a < x < b$ e $\varphi(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$. Mostre que φ é uma função C^∞ com um único ponto de máximo.

36. Obtenha funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com as seguintes propriedades:

i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$;

ii) $g(x) = x$ se $|x| \leq 1$, e $|g(x)| < |x|$ se $|x| > 1$.

37. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto $a \in \text{int}(I)$. Então

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Dê um exemplo em que existe o limite acima mas $f'(a)$ não existe.

38. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto $a \in \text{int}(I)$. Prove que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}.$$

39. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n vezes deriváveis. Prove que se, para algum $a \in \mathbb{R}$ vale $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$ então $(g \circ f)^{(i)}(a) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

40. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 4 vezes deriváveis. Escreva a regra da cadeia sob a forma $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ onde o ponto significa multiplicação de funções. Conclua que $(g \circ f)'' = (g'' \circ f) \cdot (f')^2 + (g' \circ f) \cdot f''$. Mostre também que $(g \circ f)''' = (g''' \circ f) \cdot (f')^3 + 3(g'' \circ f) \cdot f'' \cdot f' + (g' \circ f) \cdot f'''$. Calcule ainda $(g \circ f)^{(4)}$.

41. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n vezes deriváveis. Para cada partição $n = n_1 + \cdots + n_k$ de n como soma de k números naturais, existe um inteiro $\alpha = \alpha(n_1, \ldots, n_k)$ tal que

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha(n_1, \ldots, n_k) \cdot (g^{(k)} \circ f) \cdot f^{(n_1)} \cdot f^{(n_2)} \ldots f^{(n_k)}.$$

onde, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, vale $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

42. A função $f(x) = |x|^{2n+1}$ é de classe C^{2n} na reta inteira mas não é $2n+1$ vezes derivável.

43. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se f se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto $a \in \mathbb{R}$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $f(x) = (x-a)^k \cdot \varphi(x)$, onde $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞. Se f é de classe C^n e $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$ então, para $k \leq n$ temos $f(x) = (x-a)^k \varphi(x)$, com $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $n-k$.

44. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, com $a \in I$. Temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta_n \cdot h)}{n!}\cdot h^n.$$

Mais precisamente, para todo h tal que $a+h \in I$, podemos encontrar $\theta_n = \theta_n(h)$, com $0 < \theta_n < 1$, tal que a fórmula acima vale. Mostre que, se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, seja qual for a função θ_n, definida da maneira acima, tem-se

$$\lim_{h\to 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}.$$

[*Sugestão*: Desenvolva $f(a+h)$ segundo Taylor-Lagrange até a ordem $n+1$, compare o resultado obtido com a expressão acima e use o Teorema do Valor Médio].

45. Sejam f, g analíticas no intervalo aberto I. Se existe $a \in I$ tal que f e g coincidem, juntamente com todas suas derivadas, no ponto a, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Mostre que isto seria falso se supuséssemos apenas f e g de classe C^∞.

46. Dadas f e g analíticas no intervalo aberto I, seja $X \subset I$ um conjunto que possui um ponto de acumulação $a \in I$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Em particular, se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

47. Seja $I = (a - \delta, a + \delta)$. Dada $f\colon I \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, suponha que existam constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tais que, para todo $x \in I$ se tenha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Prove que $\Sigma a_n(x-a)^n$ é a série de Taylor de f em torno de a, isto é, que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$.

48. Seja $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto 0.

49. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo. Prove que f é convexa se, e somente se, para quaisquer a, b em I e $0 \leq t \leq 1$ vale $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

50. Verifique que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, é convexa e conclua que, para $0 \leq t \leq 1$ e $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer vale $e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + t \cdot e^y$. Deduza daí a desigualdade $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, para α, β, a, b não-negativos, com $\alpha + \beta = 1$.

51. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexa no intervalo I. Se $a_1, \ldots, a_n$ pertencem a I, $t_1, \ldots, t_n$ pertencem a $[0, 1]$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, prove que $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$.

52. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $t_1, \ldots, t_n$ números não-negativos, com $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Prove que $x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$. Conclua, em particular a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. (Cfr. Exercício 54, Capítulo III.)

53. Seja $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. [*Sugestão*: todo ponto onde φ' se anule deve ser de máximo. Logo, o mínimo de

φ é atingido nos extremos do intervalo.] Conclua que, se $f: I \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável e $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente convexa no intervalo I. [Dados $a < b$ em I, seja g a função linear que coincide com f nos pontos a e b. Aplique o resultado anterior à função $\varphi = g - f$.]

54. Seja f contínua num ponto. Prove que se f é derivável nesse ponto então existe no máximo uma reta que coincide com o gráfico de f uma infinidade de vezes em qualquer vizinhança do ponto.

55. Seja $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ então existe $x \in (a, +\infty)$ tal que $f''(x) = 0$.

Capítulo IX

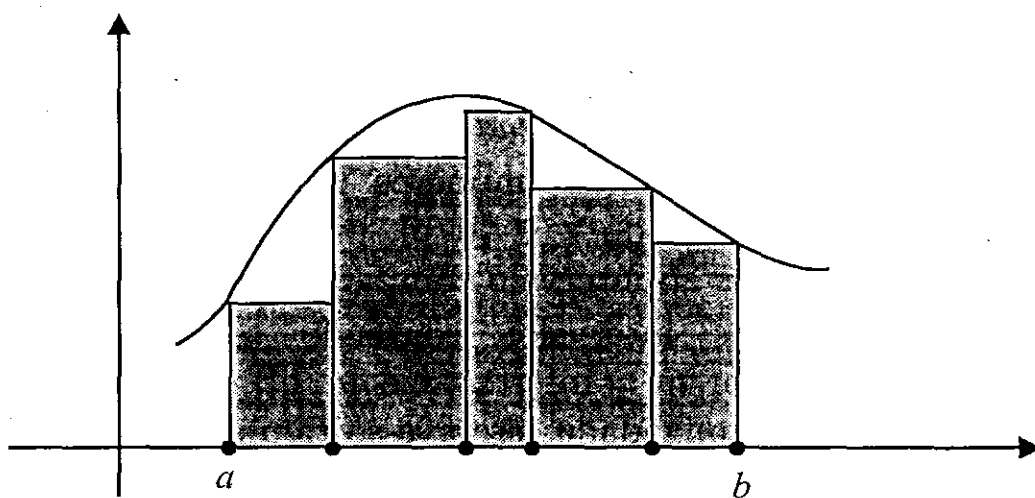
Integral de Riemann

Estudaremos agora a integral de Riemann. A principal motivação para os conceitos introduzidos neste capítulo encontra-se no seguinte problema. Suponhamos dada uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada no intervalo $[a, b]$. Admitamos, por simplicidade, que f seja não-negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Consideremos o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, formado pelos pontos do plano compreendidos entre o eixo das abscissas, o gráfico de f, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Qual a área deste conjunto? Em primeiro lugar, é necessário dizer o que significa a "área" de A e, em seguida, tentar calculá-la.

A área de um subconjunto limitado A do plano $\mathbb{R}^2$ deve ser um número real. Como defini-lo? Podemos admitir que sabemos calcular áreas de polígonos e tomar como aproximações por falta deste número as áreas dos polígonos contidos em A. Isto equivale a pôr: área de A = supremo das áreas dos polígonos contidos em A. Poderíamos também considerar as áreas dos polígonos que contêm A como aproximações por excesso para a área de A. Neste caso, definiríamos a área de A como o ínfimo das áreas dos polígonos que contêm A. Ora, como veremos no texto que se segue, estes dois métodos de definir a área de A nem sempre conduzem ao mesmo resultado. Para evitar de fazer uma escolha arbitrária, é melhor chamar *área interna* do conjunto A, e indicar com o símbolo $m_i(A)$, o sup das áreas dos polígonos contidos em

A. Ao inf das áreas dos polígonos que contêm A chamaremos *área externa* de A e o indicaremos com a notação $m_e(A)$. É evidente que $m_i(A) \leq m_e(A)$. Quando ocorrer que $m_i(A) = m_e(A)$, diremos que A é um *conjunto mensurável* (no sentido de Jordan) e chamaremos o número $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$ a *área de* A. Veremos adiante exemplos de conjuntos A para os quais a área interna é estritamente inferior à área externa. Tais conjuntos não são mensuráveis.

Ao considerar a área de um conjunto A podemos, por simplicidade, restringir nossa atenção a polígonos de um tipo especial, que chamaremos de *polígonos retangulares*, os quais são reuniões de retângulos justapostos cujos lados são paralelos aos eixos $x = 0$ e $y = 0$.

Mais particularmente ainda, se o conjunto A é determinado por uma função não-negativa $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, basta considerar polígonos retangulares formados por retângulos cujas bases inferiores estão sobre o eixo das abscissas e cujas bases superiores tocam o gráfico da função.

Cada um desses polígonos retangulares P determina uma decomposição ("partição") do intervalo $[a, b]$ em subintervalos justapostos e, conforme $P \subset A$ ou $P \supset A$, a área de P (soma das áreas dos retângulos que o constituem) motiva a noção de *soma inferior* ou de *soma superior* associada a uma partição de $[a, b]$. (Veja o §1 abaixo.)

A área interna de A será a integral inferior de f, enquanto a área externa será a integral superior. A existência ou não da área de A está ligada à regularidade da função f. Veremos que A possui área se, e somente se, f tem poucas descontinuidades, num sentido que será tornado preciso no texto.

É uma circunstância notável que a noção de área esteja relacionada com as derivadas. Esta interdependência entre derivação e integração é expressa pelo fato de que o conjunto A, acima associado à função f, tem como área o número $F(b) - F(a)$, desde que F seja uma função cuja derivada é f.

Neste capítulo, apresentaremos a definição e as principais propriedades da integral, daremos condições para que uma função limitada seja integrável e estabeleceremos as relações mais importantes entre a integral e a derivada. Como aplicação, mostraremos como os logaritmos e as exponenciais podem ser introduzidos de modo rápido e elegante, com o uso da integral.

1 Integral superior e integral inferior

Consideraremos funções reais $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, definidas num intervalo compacto $[a, b]$ e *limitadas* nesse intervalo.

Isto significa que existem números reais m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, que os valores $f(x)$ pertencem todos ao intervalo compacto $[m, M]$.

O menor desses intervalos contendo os valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, é dado por $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ e $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. Por simplicidade, escreve-se também $m = \inf f$ e $M = \sup f$.

Para que f seja limitada em $[a, b]$ é necessário e suficiente que exista $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$.

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. Quando escrevermos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ convencionaremos *sempre* que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, serão chamados os *intervalos da partição* P.

Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, uma partição de $[a,b]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, indicaremos com m_i o ínfimo e com M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Definiremos a *soma inferior* $s(f;P)$ e a *soma superior* $S(f;P)$ da função f relativamente à partição P pondo:

$$s(f;P) = m_1 \cdot (t_1 - t_0) + \cdots + m_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

e

$$S(f;P) = M_1 \cdot (t_1 - t_0) + \cdots + M_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Se m é o ínfimo e M o supremo de f em $[a,b]$, temos

$$m \cdot (b-a) \le s(f;P) \le S(f;P) \le M \cdot (b-a),$$

para toda partição P do intervalo $[a,b]$.

Quando f é uma função positiva, as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico de f, respectivamente, e portanto como valores aproximados (por falta e por excesso) da área compreendida entre esse gráfico e o eixo das abscissas.

Sejam P, Q partições de $[a,b]$. Quando $P \subset Q$, diz-se que a partição Q é *mais fina* do que P. A maneira mais simples de refinar uma partição P é acrescentar-lhe um único ponto.

Tomemos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ e consideremos

$$Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, r, t_i, \ldots, t_n\},$$

onde $t_{i-1} < r < t_i$. Sejam m_i, m' e m'' os ínfimos de f nos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $[t_{i-1}, r]$ e $[r, t_i]$ respectivamente. Evidentemente, $m_i \le m'$ e $m_i \le m''$. Como $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, vem

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= (m'' - m_i)(t_i - r) + (m' - m_i)(r - t_{i-1}) \ge 0. \end{aligned}$$

Assim, se uma partição Q resulta do acréscimo de um ponto à partição P, tem-se $s(f;P) \leq s(f;Q)$. Aplicando repetidamente este resultado, concluímos que $P \subset Q$ implica $s(f;P) \leq s(f;Q)$. Analogamente se demonstra que $P \subset Q$ acarreta $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

Podemos então enunciar o

Teorema 1. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Quando se refina uma partição* P, *a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.*

Corolário. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Para quaisquer partições* P, Q *de* $[a,b]$, *tem-se* $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

Com efeito, a partição $P \cup Q$ refina P e Q. Logo:

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

Em palavras, toda soma inferior de f é menor do que ou igual a qualquer soma superior.

Definiremos agora a *integral inferior* $\underline{\int}_a^b f(x)dx$ e a *integral superior* $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ de uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo:

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup_P s(f;P), \qquad \overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \inf_P S(f;P).$$

O sup e o inf são tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a,b]$. As seguintes propriedades caracterizam as integrais $\underline{\int}$ e $\overline{\int}$ da função f:

1. Para qualquer partição P de $[a,b]$, tem-se $s(f;P) \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx$;

2. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $\underline{\int}_a^b f(x)dx - \varepsilon < s(f;P)$.

1'. Para toda partição P de $[a, b]$, vale $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f; P)$;

2'. Dado $\varepsilon > 0$, existe P tal que $S(f; P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$.

Segue-se das definições e do corolário acima que se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$m \cdot (b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M \cdot (b - a).$$

Em particular, se $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$, então $\left|\underline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq K \cdot (b - a)$ e $\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq K \cdot (b - a)$ pois $|f(x)| \leq K$ significa $-K \leq f(x) \leq K$.

Às vezes, por simplicidade, escrevemos apenas $\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} f$.

Exemplos

1. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida pondo-se $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1$ se x é racional. Dada qualquer partição P de $[a, b]$, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ pois todos os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de P contêm números racionais e irracionais. Logo $s(f; P) = 0$ e $S(f; P) = b - a$ para qualquer partição P. Conseqüentemente:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a.$$

2. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ constante: $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Então temos $M_i = m_i = c$ em todos os intervalos de qualquer partição P. Por conseguinte, $s(f; P) = S(f; P) = c \cdot (b - a)$ e daí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c \cdot (b - a).$$

Teorema 2. *Sejam* $a < c < b$ *e* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

A demonstração se baseia em dois lemas:

Lema 1. *Seja* $a < c < b$. *Se considerarmos apenas partições que contêm o ponto* c, *obteremos os mesmos valores para* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ *e* $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Demonstração. Dada P, acrescentando-lhe o ponto c, obtemos uma partição P' tal que $s(f;P) \le s(f;P')$ e $S(f;P') \le S(f;P)$. O lema decorre então da seguinte observação: sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \le a'$ e $b' \le b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.

Observação: O mesmo raciocínio mostra que, dada uma partição P_0 de $[a,b]$, para calcular as integrais (superior e inferior) de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ basta considerar as partições que refinam P_0.

Lema 2. *Sejam* A, B *conjuntos não-vazios limitados de números reais. Pondo* $A+B = \{x+y; x \in A, y \in B\}$, *tem-se* $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ *e* $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Demonstração. Dados quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, tem-se $x \le \sup A$ e $y \le \sup B$, donde $x + y \le \sup A + \sup B$. Logo $\sup A + \sup B$ é uma cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ e $y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$, donde $x + y > (\sup A + \sup B) - \varepsilon$. Portanto, $\sup A + \sup B$ é o supremo do conjunto $A + B$. A outra relação se prova de modo semelhante.

Corolário. *Sejam* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitadas. Então* $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ *e* $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

Com efeito, se $A = f([a,b])$ e $B = g([a,b])$, então $C = \{f(x)+g(x); x \in [a,b]\} \subset A+B$. Logo

$$\begin{aligned}\sup(f+g) &= \sup C \leq \sup(A+B) = \sup A + \sup B \\ &= \sup f + \sup g, \\ \inf(f+g) &= \inf C \geq \inf(A+B) = \inf A + \inf B \\ &= \inf f + \inf g.\end{aligned}$$

Exemplo 3. Sejam $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Então $\sup f = \sup g = 1$ e $\sup(f+g) = 0$. Neste caso, temos $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$.

Demonstração do Teorema 2. Sejam A e B, respectivamente os conjuntos das somas inferiores de $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$. Vê-se facilmente que $A+B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente às partições de $[a,b]$ que contêm o ponto c. Pelos Lemas 1 e 2 temos

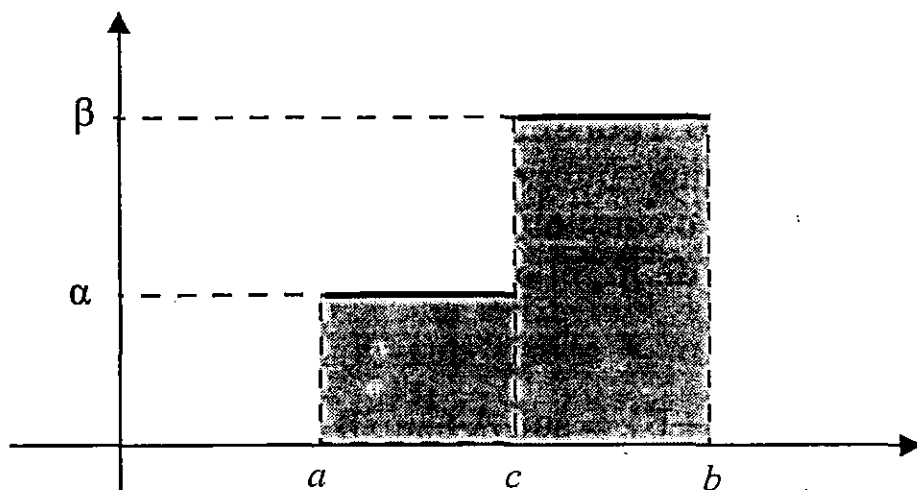
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

De maneira análoga se trata o caso de uma integral superior.

Exemplo 4. Seja $a < c < b$. Definamos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \alpha$ se $a \leq x < c$ e $f(x) = \beta$ se $c \leq x \leq b$. Mostraremos que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \alpha\cdot(c-a) + \beta\cdot(b-c)$. Sabemos que $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \underline{\int_a^c} f + \beta\cdot(b-c)$ pois $f|[c,b]$ é constante, igual a β. Analogamente, $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \beta\cdot(b-c)$. Resta pois mostrar que $\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f = \alpha\cdot(c-a)$. Para fixar as idéias, suponhamos $\alpha \leq \beta$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $a < c-\varepsilon < c$, tem-se

$\overline{\int}_{c-\varepsilon}^{c} f \leq \beta \cdot \varepsilon$. Por conseguinte, para qualquer desses $\varepsilon > 0$, temos: $\alpha \cdot (c - a) \leq \overline{\int}_{a}^{c} f = \overline{\int}_{a}^{c-\varepsilon} f + \overline{\int}_{c-\varepsilon}^{c} f \leq \alpha \cdot (c - \varepsilon - a) + \beta \cdot \varepsilon =$ $\alpha \cdot (c - a) + (\beta - \alpha) \cdot \varepsilon$. Assim, deve ser:

$$\overline{\int}_{a}^{c} f(x)\, dx = \alpha \cdot (c - a).$$

Quanto a $\underline{\int}_{a}^{c} f$, é imediato que deve ser igual a $\alpha \cdot (c - a)$ pois toda soma inferior de $f|[a, c]$ tem este valor.

Note-se que poderíamos ter tomado um valor arbitrário para f no ponto a, sem alterar o valor das integrais.

Mais geralmente, dada uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, constante (digamos igual a c_i) em cada intervalo aberto (t_{i-1}, t_i), chama-se uma *função escada.*

Uma repetição do argumento acima mostra que as integrais da função escada f são dadas por

$$\underline{\int}_{a}^{b} f(x)\, dx = \overline{\int}_{a}^{b} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Novamente observamos que os valores que f assume nos pontos de divisão de P não afetam as integrais.

Lema 3. *Seja* A *um conjunto limitado não-vazio de números reais. Dado* $x \in \mathbb{R}$, *ponhamos* $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$. *Então* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ *caso* $c > 0$. *Quando* $c < 0$, *tem-se* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

Demonstração. Seja $c > 0$. Para todo $x \in A$ temos $x \leq \sup A$, donde $c \cdot x \leq c \cdot \sup A$. Isto mostra que $c \cdot \sup A$ é uma cota superior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x \in A$ tal que $\sup A - \frac{\varepsilon}{c} < x$, donde $c \cdot \sup A - \varepsilon < c \cdot x$. Portanto $c \cdot \sup A$ é o supremo do conjunto $c \cdot A$. Seja agora $c < 0$. Temos $x \geq \inf A$ para todo $x \in A$, donde $c \cdot x \leq c \cdot \inf A$. Portanto $c \cdot \inf A$ é cota superior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < \inf A - \frac{\varepsilon}{c}$ $\left(\text{pois } -\frac{\varepsilon}{c} > 0!\right)$. Logo $c \cdot x > c \cdot \inf A - \varepsilon$, o que prova ser $c \cdot \inf A$ o supremo de $c \cdot A$.

Teorema 3. *Sejam* $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitadas. Então*

1. $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx + \underline{\int_a^b} g(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] dx \leq \overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \overline{\int_a^b} g(x)\, dx.$

2. *Quando* $c > 0$, $\underline{\int_a^b} c \cdot f(x) dx = c \cdot \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ *e* $\overline{\int_a^b} c \cdot f(x)\, dx = c \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$

   No caso de $c < 0$, *tem-se* $\underline{\int_a^b} c \cdot f = c \cdot \overline{\int_a^b} f$ *e* $\overline{\int_a^b} c \cdot f = c \cdot \underline{\int_a^b} f.$

   Em particular para $c = -1$, $\underline{\int_a^b} (-f) = -\overline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} (-f) = -\underline{\int_a^b} f.$

3. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ *e* $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$.

Demonstração. 1. Basta provar a primeira desigualdade, pois a terceira é análoga e a segunda é conhecida. Indiquemos com $m_i(f)$, $m_i(g)$ e $m_i(f+g)$ os ínfimos das funções f, g e $f+g$ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de uma partição P. Segue-se do corolário do Lema 2 que $m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g)$, donde $s(f+g;P) \geq s(f;P) + s(g;P)$. Logo

$$(*) \qquad \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx \geq s(f;P) + s(g;P)$$

para qualquer partição P. Dadas arbitrariamente as partições P e Q temos, portanto

$$s(f;P) + s(g;P) \leq s(f;P\cup Q) + s(g;P\cup Q) \leq \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx.$$

O Lema 2 nos dá, então,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \sup_{P,Q}[s(f;P) + s(g;Q)] \leq \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx.$$

2. Pelo Lema 3, temos $m_i(c\cdot f) = c\cdot m_i(f)$ e $M_i(c\cdot f) = c\cdot M_i(f)$ quando $c > 0$, enquanto $m_i(c\cdot f) = c\cdot M_i(f)$ e $M_i(c\cdot f) = c\cdot m_i(f)$ para $c < 0$. O resultado segue-se, aplicando-se novamente o mesmo lema ao conjunto das somas inferiores e ao conjunto das somas superiores de $c\cdot f$.

3. De $f(x) \leq g(x)$, para todo x, obtém-se $m_i(f) \leq m_i(g)$ e $M_i(f) \leq M_i(g)$ para toda partição de $[a,b]$. Daí resultam $s(f;P) \leq s(g;P)$ e $S(f;P) \leq S(g;P)$. As desigualdades com as integrais seguem-se.

Corolário. *Se* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$ *então* $\underline{\int_a^b} f \geq 0$ *e* $\overline{\int_a^b} f \geq 0$.

2 Funções integráveis

Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *integrável* quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Este valor comum é chamado *a integral* de f e indicado com

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou, simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

Por exemplo, toda função constante, $f(x) = c$, é integrável, com $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$. Mais geralmente, (veja o Exemplo 4) se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada, então f é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma c_i \cdot (t_i - t_{i-1})$, onde os c_i são os valores que f assume nos intervalos (t_{i-1}, t_i). Por outro lado, a função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, igual a 0 nos números irracionais e a 1 nos racionais, não é integrável. (Veja o exemplo 1.)

Quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, as integrais $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ resultam de tentar medir a área do conjunto plano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, limitado pelo gráfico de f, pelo segmento $[a,b]$ do eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Em $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ usamos áreas de polígonos contidos em A como aproximações (por falta) da área de A, enquanto em $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ tomamos polígonos que contêm A, isto é, aproximações por excesso. Podemos dizer que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ é a "área interna" do conjunto A, e que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ é sua "área

externa". A afirmação de que f é integrável significa que as aproximações por falta e por excesso para a área de A conduzem ao mesmo resultado, isto é, que o conjunto A possui, de fato, uma área, igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. No caso da função do Exemplo 1, o conjunto A tem uma área interna igual a 0 e uma área externa igual a 1, logo não possui uma área bem definida.

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, consideremos o conjunto σ das somas inferiores e o conjunto Σ das somas superiores de f. Para toda $s = s(f;P) \in \sigma$ e toda $S = S(f;Q) \in \Sigma$, temos $s \leq S$. Isto nos dá sempre $\sup \sigma \leq \inf \Sigma$. Sabemos que $\sup \sigma = \underline{\int_a^b} f$ e $\inf \Sigma = \overline{\int_a^b} f$.

Dizer que f é integrável significa afirmar que $\sup \sigma = \inf \Sigma$. Ora, vale o seguinte

Lema 4. *Sejam σ, Σ conjuntos limitados não-vazios de números reais. Suponhamos que, para quaisquer $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ seja $s \leq S$. Então $\sup \sigma = \inf \Sigma$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existem $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ tais que $S - s < \varepsilon$.*

Demonstração. Vale sempre $\sup \sigma \leq \inf \Sigma$. Suponhamos inicialmente que, para cada $\varepsilon > 0$, existam $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ tais que $S - s < \varepsilon$. Se fosse $\sup \sigma < \inf \Sigma$, tomaríamos $\varepsilon = \inf \Sigma - \sup \sigma > 0$ e então, para quaisquer $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ teríamos $s \leq \sup \sigma \leq \inf \Sigma \leq S$ donde $S - s \geq \inf \Sigma - \sup \sigma = \varepsilon$, uma contradição. Reciprocamente, se $\sup \sigma = \inf \Sigma = c$, digamos, então, dado $\varepsilon > 0$, existem $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ tais que $c - \frac{\varepsilon}{2} < s \leq S < c + \frac{\varepsilon}{2}$ e, portanto, $S - s < \varepsilon$.

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, sua *oscilação* no conjunto $X \subset [a,b]$ é definida por

$$\omega(f;X) = \sup f(X) - \inf f(X).$$

O lema abaixo implica uma definição equivalente para a oscilação.

Lema 5. *Seja* Y *um conjunto não-vazio limitado de números reais. Se* $m = \inf Y$ *e* $M = \sup Y$*, então,* $M - m = \sup\{|x - y|; x, y \in Y\}$.

Demonstração. Seja $A = \{|x - y|; x, y \in Y\}$. Dados $x, y \in Y$ arbitrários, podemos escolher a notação de modo que $x \geq y$. Temos $m \leq y \leq x \leq M$, o que nos dá $|x - y| = x - y = x + (-y) \leq M - m$. Logo $M - m$ é uma cota superior de A. Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x, y \in Y$ tais que $x > M - \frac{\varepsilon}{2}$ e $y < m + \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $-y > -m - \frac{\varepsilon}{2}$. Segue-se que $|x - y| \geq x - y = x + (-y) > (M - m) - \varepsilon$. Isto mostra que $M - m$ é a menor cota superior de A, ou seja $M - m = \sup A$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Seja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Para todo* $X \subset [a, b]$ *não-vazio, tem-se* $\omega(f; X) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.

Basta tomar $Y = f(X)$ no Lema 5.

Dadas $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e uma partição P do intervalo $[a, b]$, indicaremos com $\omega_i = M_i - m_i$ a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Teorema 4. *Seja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f *é integrável;*

(2) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existem partições* P, Q *do intervalo* $[a, b]$ *tais que* $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$*;*

(3) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe uma partição* P *do intervalo* $[a, b]$ *tal que* $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$*;*

(4) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe uma partição* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *do intervalo* $[a, b]$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Demonstração. O Lema 4 diz que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Como $\Sigma\, \omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = S(f;P) - s(f;P)$, temos também (3) $\Leftrightarrow$ (4). Além disso, é óbvio que (3) $\Rightarrow$ (2). Finalmente, se $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$, tomando $P_0 = P \cup Q$, temos $s(f;P) \le s(f;P_0) \le S(f;P_0) \le S(f;Q)$, donde $S(f;P_0) - s(f;P_0) < \varepsilon$. Isto mostra que (2) $\Rightarrow$ (3), o que encerra a demonstração.

Exemplo 5. Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas que diferem apenas num subconjunto finito de $[a,b]$. Então f será integrável se, e somente se, g o for. No caso afirmativo tem-se $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Com efeito, a diferença $f - g$ é uma função escada. (Os pontos onde $f(x) \neq g(x)$ formam, juntamente com a e b, uma partição de $[a,b]$ e $f - g$ é constante, igual a zero, no interior de cada intervalo dessa partição.) Logo, $f - g$ é integrável e $\int_a^b (f-g) = 0$. Como $f = g + (f - g)$, segue-se do Teorema 5 abaixo que f é integrável se, e somente se, g o é, com $\int_a^b f = \int_a^b g + \int_a^b (f-g)$, ou seja, $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Teorema 5. *Sejam* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integráveis. Então:*

1. *Para* $a < c < b$, $f|[a,c]$ *e* $f|[c,b]$ *são integráveis e se tem*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Reciprocamente, se $f|[a,c]$ *e* $f|[c,b]$ *são integráveis, então* f *é integrável, e vale a igualdade acima.*

2. *Para todo* $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ *é integrável e*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. $f + g$ *é integrável e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

4. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Em particular, se $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$, *então,*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

5. $|f(x)|$ *é integrável e se tem*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Segue-se de (4) *e* (5) *que se* $|f(x)| \leq K$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então* $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq K \cdot (b - a)$.

6. *O produto* $f \cdot g$ *é integrável.*

Demonstração.

(1) Sejam $\alpha = \underline{\int}_a^c f(x)\, dx$, $A = \overline{\int}_a^c f(x)\, dx$, $\beta = \underline{\int}_c^b f(x)\, dx$ e $B = \overline{\int}_c^b f(x)\, dx$. Então $\overline{\int}_a^b f(x)\, dx = A + B$ e $\underline{\int}_a^b f(x)\, dx = \alpha + \beta$. Sempre se tem $\alpha \leq A$ e $\beta \leq B$. Logo $\alpha + \beta = A + B \Leftrightarrow \alpha = A$ e $\beta = B$, ou seja, f é integrável se, e somente se, $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis.

As afirmações (2), (3) e (4) seguem-se do Teorema 3. Consideremos (5): em primeiro lugar, mostremos que a função

$x \mapsto |f(x)|$ é integrável. Ora, para $x, y \in [a, b]$ quaisquer, temos $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Logo, pelo corolário do Lema 5, para qualquer subconjunto $X \subset [a, b]$, temos $\omega(|f|; X) \leq \omega(f; X)$. Em particular, dada uma partição arbitrária P de $[a, b]$, temos $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$. Segue-se do Teorema 4 que $|f|$ é integrável. Além disso, para todo $x \in [a, b]$, vale $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Como $|f|$ é integrável, podemos usar as afirmações (2), com $c = -1$, e (4), para obter

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ou seja:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Para demonstrar (6), seja K tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Dada uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, indiquemos com $\omega_i(f \cdot g)$, $\omega_i(f)$ e $\omega_i(g)$ as oscilações dessas funções no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| \\ &\quad + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq K \cdot [\omega_i(f) + \omega_i(g)] \end{aligned}$$

e, portanto, $\omega_i(f \cdot g) \leq K \cdot [\omega_i(f) + \omega_i(g)]$. Daí $\Sigma\omega_i(f \cdot g)(t_i - t_{i-1}) \leq K \cdot [\Sigma\omega_i(f)(t_i - t_{i-1}) + \Sigma\omega_i(g)(t_i - t_{i-1})]$. A integrabilidade de $f \cdot g$ decorre então da integrabilidade de f e de g, conforme o Teorema 4.

Observação: A igualdade $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ tem sentido apenas quando $a < c < b$. A fim de torná-la verdadeira sejam quais forem a, b e c reais *convencionaremos* o seguinte:

primeiro: $\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

segundo: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Aceitas estas convenções, vale, para toda função integrável f, a igualdade:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

sejam quais forem os números reais a, b, c. Há seis possibilidades a considerar: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Em cada caso, basta admitir a integrabilidade de f no intervalo maior.

Teorema 6. *Toda função contínua* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável.*

Demonstração. Como $[a,b]$ é compacto, f é limitada. Além disso, é uniformemente contínua: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$ Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Através dos pontos $t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, obtemos uma partição de $[a,b]$ tal que $x, y \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$ Isto mostra que a oscilação ω_i de f em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ é $\leq \varepsilon/(b-a)$. Segue-se que $\Sigma\omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon$ e portanto f é integrável, pelo Teorema 4.

Teorema 7. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Se, para cada* $c \in [a,b)$, $f|[a,c]$ *é integrável, então* f *é integrável.*

Demonstração. Seja $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in [a,b)$ tal que $K \cdot (b-c) < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$ Como $f|[a,c]$ é integrável, existe uma partição $\{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,c]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Pondo $t_{n+1} = b$, obtemos uma partição $\{t_0, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$ de $[a,b]$. Certamente $\omega_{n+1} \leq 2K$.

Logo $\omega_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n) = \omega_{n+1} \cdot (b - c) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$ Portanto, $\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ e assim f é integrável.

Corolário 1. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Se, para* $a < c < d < b$ *quaisquer,* $f|[c,d]$ *é integrável, então* f *é integrável.*

Com efeito, fixemos um ponto p, com $a < p < b$. Pelo Teorema 7, $f|[a,p]$ e $f|[p,b]$ são integráveis. Logo f é integrável. (Veja o item (1) do Teorema 5.)

Corolário 2. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada, com um número finito de descontinuidades. Então* f *é integrável.*

Com efeito, sejam $t_0, \ldots, t_n$ os pontos de descontinuidade de f em $[a,b]$. Pelo Corolário 1, para cada $i = 1, \ldots, n$, $f|[t_{i-1}, t_i]$ é integrável pois f é contínua em todo intervalo $[c, d]$ com $t_{i-1} < c < d < t_i$. Logo f é integrável. (Veja o item (1) do Teorema 5.)

Exemplo 6. A função $f\colon [-1,+1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é integrável pois é limitada, sendo descontínua apenas no ponto 0. Observe que o Exemplo 5 não contém o Corolário 2 acima.

Exemplo 7. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é irracional ou zero, e $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ se $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível com $p \neq 0$. Então f é descontínua num conjunto infinito, a saber: o conjunto dos números racionais do intervalo $[a,b]$. Note-se que $0 \leq f(x) \leq 1$, de modo que f é limitada. Mostraremos agora que f é integrável no intervalo $[a,b]$. Mais precisamente, temos $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $F = \left\{x \in [a,b]; f(x) \geq \frac{\varepsilon}{b-a}\right\}$ é finito pois é o conjunto das frações irredutíveis pertencentes a $[a,b]$ cujos denominadores são $\leq \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot$ Tomemos uma partição P de $[a,b]$ tal que a soma dos

comprimentos dos intervalos de P que contêm algum ponto de F seja menor do que ε. Observemos que se $F \cap [t_{i-1}, t_i] = \emptyset$ então $0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$ e, portanto, $M_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot$ A soma $S(f;P) = \Sigma M_i(t_i - t_{i-1})$ relativa a esta partição se decompõe em duas parcelas:

$$\Sigma M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \Sigma M_i'(t_i' - t_{i-1}') + \Sigma M_i''(t_i'' - t_{i-1}''),$$

onde assinalamos com um apóstrofo os intervalos $[t_{i-1}', t_i']$ que contêm algum ponto de F e com dois, $[t_{i-1}'', t_i'']$, os que são disjuntos de F. O primeiro somatório é $< \varepsilon$ porque $\Sigma(t_i' - t_{i-1}') < \varepsilon$ e $M_i' \leq 1$. O segundo é $< \varepsilon$ porque $M_i'' \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ e $\Sigma(t_i'' - t_{i-1}'') < b - a$. Logo $S(f;P) = \Sigma M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < 2\varepsilon$. Segue-se que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$. Como $f(x) \geq 0$ para todo x, temos $0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$. Concluímos que f é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

3 O Teorema Fundamental do Cálculo

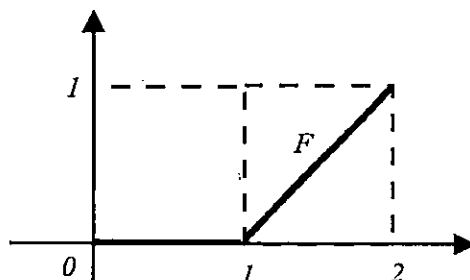
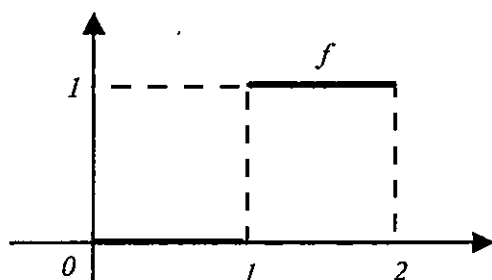
Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Pelo item (1) do Teorema 5, para todo $x \in [a,b]$, $f|[a,x]$ é integrável. Definiremos então uma função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Se tivermos $|f(t)| \leq K$ para todo $t \in [a,b]$, então, dados quaisquer $x, y \in [a,b]$, tem-se

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq K \cdot |y - x|.$$

Por conseguinte, F é (uniformemente) contínua no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 8. Seja $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 0$ se $0 \leq t < 1$ e $f(t) = 1$ se $1 \leq t \leq 2$. Tomando $F\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, temos $F(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 1$ e $F(x) = x - 1$ se $1 \leq x \leq 2$.

Vemos que F é contínua, mas não é derivável no ponto $x = 1$, que corresponde a uma descontinuidade de f.

A função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ chama-se uma *integral indefinida* de f. O processo de passar de f para F melhora, ou "amacia" as qualidades da função. Mostramos acima que f limitada implica F lipschitziana. Veremos agora que f contínua implica F derivável.

Teorema 8. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Se* f *é contínua no ponto* $c \in [a,b]$, *então a função* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *definida por* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *é derivável no ponto* c *e se tem* $F'(c) = f(c)$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que $t \in [a,b]$, $|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Então, se $0 < h < \delta$ e $c + h \in [a,b]$, temos

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} f(t)\,dt - h \cdot f(c)\right|$$
$$= \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} [f(t) - f(c)]\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F'_+(c) = f(c)$. De modo análogo se raciocina com h negativo, obtendo-se $F'_-(c) = f(c)$, donde $F'(c) = f(c)$.

Corolário. *Dada* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua, existe* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivável, tal que* $F' = f$.

Basta tomar $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Chama-se *primitiva* de uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a uma função derivável $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$. O corolário acima diz que toda função contínua num intervalo compacto possui primitiva.

Nem toda função integrável f possui uma primitiva F. Com efeito, já sabemos que se $f = F'$ então f não pode ter descontinuidades de primeira espécie.

Exemplo 9. A função f do Exemplo 8 não possui primitiva em intervalo algum que contenha o ponto 1 em seu interior. Por outro lado, a função descontínua $f(x)=2x\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ $(f(0)=0)$ possui a primitiva $F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $F(0) = 0$.

Notemos que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva, então possui uma infinidade delas. Duas primitivas de f em $[a,b]$ diferem por uma constante, pois têm a mesma derivada f.

Daí resulta que se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 então

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Com efeito, sendo F' contínua, pelo Teorema 8 a função $\varphi(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$ e a função F são ambas primitivas de f' em $[a,b]$. Logo $\varphi(x) - F(x) = \text{constante}$. Como $\varphi(a) = 0$, segue-se que $\varphi(x) - F(x) = -F(a)$, logo $\varphi(x) = F(x) - F(a)$, ou seja,

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

para todo $x \in [a,b]$. Tomando $x = b$, obtemos o resultado desejado.

Mostraremos agora que não é preciso supor F' contínua.

Teorema 9. (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se uma função integrável* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *possui uma primitiva* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *então* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Em outros termos, se uma função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *possui derivada integrável, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Demonstração. Para qualquer partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$, o Teorema do Valor Médio nos dá

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

onde $t_{i-1} < \xi_i < t_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Indicando com m_i' e M_i' respectivamente o inf e o sup de F' no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, temos $m_i' \leq F'(\xi_i) \leq M_i'$, donde $s(F';P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F';P)$. Portanto, $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$.

O Teorema 9 diz que as únicas primitivas de uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (se existirem) são da forma $\int_a^x f(t)\,dt +$ constante. Ele reduz a avaliação de $\int_a^b f(x)\,dx$, (quando a função f possui primitiva) à obtenção de uma primitiva de f, trabalho que ocupa uma boa porção dos cursos tradicionais de Cálculo.

Como aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos agora o desenvolvimento de Taylor de log em torno do ponto 1 (ou de $\log(1+x)$ em torno de $x = 0$).

Exemplo 10. Como $1 + t = 1 - (-t)$, segue-se da fórmula $\dfrac{1-t^n}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$ que

$$(*) \quad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t},$$

para $t \neq -1$. Como $\log(1+t)$ é uma primitiva de $\frac{1}{1+t}$ e $\frac{t^{i+1}}{i+1}$ é uma primitiva de t^i, temos:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) \quad \text{e} \quad \int_0^x t^i dt = \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

para todo $x > -1$. Tomando a integral de 0 a x de ambos os membros da igualdade (*), obtemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

para todo $x > -1$. Escrevamos

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Observamos os seguintes fatos:

$$0 \leq x \Rightarrow |r_n(x)| \leq \int_0^x t^n \cdot dt = \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow |r_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} dt = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)},$$

pois $1+t \geq 1+x$.

Concluímos daí que $\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0$. Logo $p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ é o polinômio de Taylor de ordem n para a função log no ponto 1. (Ou para $f(x) = \log(1+x)$ no ponto 0.) Em seguida, notamos que, para todo $x \in (-1, 1]$, temos $\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$.

Vale, portanto, o desenvolvimento de Taylor para $-1<x\leq 1$;

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Em particular, pondo $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots.$$

4 Fórmulas clássicas do Cálculo Integral

Teorema 10. (Mudança de variável). *Sejam* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua,* $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *derivável, com* g' *integrável e* $g([c,d]) \subset [a,b]$. *Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Demonstração. Sendo contínua, f possui uma primitiva $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. O Teorema Fundamental do Cálculo dá:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Por outro lado, pela Regra da Cadeia, $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Assim, $F \circ g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função integrável $t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$. Temos, portanto,

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g(d)) - F(g(c)),$$

o que prova o Teorema 10.

Observações: 1. No Teorema 10, não exigimos que, para todo $t \in [c,d]$, o ponto $g(t)$ pertença ao intervalo cujos extremos são $g(c)$ e $g(d)$. Muito menos requeremos que g seja monótona. Em compensação, supomos f contínua. Na realidade, a demonstração acima usa apenas que f é integrável e possui uma primitiva. No Exercício 11 abaixo, damos outro enunciado do Teorema 10, no qual admitimos apenas f integrável mas estipulamos que g seja monótona.

2. A notação tradicional $\int_a^b f(x)\,dx$, em vez de $\int_a^b f$, encontra uma boa justificativa no Teorema 10. Para mudarmos de variável

em $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$, tomamos $x = g(t)$ e a diferencial de x será $dx = g'(t)dt$. Quando t assume os valores c e d, x valerá $g(c)$ e $g(d)$ respectivamente. Estas substituições dão, portanto, $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$

Teorema 11. (Integração por partes.) *Se* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *possuem derivadas integráveis então*

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = f \cdot g]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt,$$

onde $f \cdot g]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$.

Demonstração. Basta observar que $f \cdot g$ é uma primitiva de $f \cdot g' + f' \cdot g$ e integrar esta soma de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 12. (Fórmulas de Valor Médio para Integrais.) *São dadas as funções* $f, p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *com* f *contínua. Então:*

A. *Existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$.

B. *Se* p *é integrável e não muda de sinal, existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$.

C. *Se* p *é positiva, decrescente, com derivada integrável, existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = p(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx$.

Demonstração. A. Seja F uma primitiva de f. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a).$$

B. Para todo $x \in [a,b]$, temos $m \le f(x) \le M$, onde m é o inf e M é o sup de f para fixar idéias, suponhamos $p(x) \ge 0$.

Então $m \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq M \cdot p(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Segue-se que

$$m \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Logo, existe $d \in [m, M]$ tal que $d \cdot \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)p(x)\,dx$. Como f é contínua, temos $d = f(c)$ para algum $c \in [a, b]$, o que prova B.

C. Definamos $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pondo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Então $F' = f$ e $F(a) = 0$. Integrando por partes, obtemos

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = \int_a^b F'(x)p(x)\,dx = F(b)p(b) - \int_a^b F(x)p'(x)\,dx.$$

Pelo item B, aplicado à última integral, existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)p(x)\,dx &= F(b) \cdot p(b) - F(\xi) \cdot \int_a^b p'(x)\,dx \\
&= F(b) \cdot p(b) - F(\xi) \cdot p(b) + F(\xi) \cdot p(a) \\
&= \left[F(\xi)\,\frac{p(a) - p(b)}{p(a)} + F(b)\,\frac{p(b)}{p(a)}\right] p(a) \\
&= d \cdot p(a).
\end{aligned}$$

Pondo $\alpha = [p(a) - p(b)]/p(a)$ e $\beta = p(b)/p(a)$, vemos que $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Logo $d = \alpha \cdot F(\xi) + \beta \cdot F(b)$ pertence ao intervalo cujos extremos são $F(\xi)$ e $F(b)$. Pela continuidade de F, existe c entre ξ e b (donde $c \in [a, b]$) tal que $F(c) = d$. Concluimos então que

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = p(a) \cdot F(c) = p(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx$$

para algum $c \in [a, b]$.

Observações: 1. No item B, pode-se mostrar que se pode sempre obter o ponto c no intervalo aberto (a, b).

2. O item C do teorema acima, onde a derivada p' foi usada na demonstração mas não aparece na fórmula, pode ser demonstrado com hipóteses menos restritivas. Isto se faz de modo natural dentro do contexto da integral de Lebesgue. A versão acima é satisfatória nos casos mais freqüentemente encontrados.

3. A fórmula do valor médio dada no item C é muitas vezes usada para demonstrar um critério de convergência para "integrais impróprias" análogo ao critério de Dirichlet para séries. (Teorema 21 do Capítulo IV.) Veja o Exercício 14, a seguir.

Deduziremos agora a Fórmula de Taylor com resto integral, usando integração por partes. Comecemos com um caso particular.

Seja $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ possuindo derivada segunda integrável. Temos $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$. Vamos "calcular" esta integral por partes, mas não de maneira óbvia, que nos levaria de volta ao valor $\varphi(1) - \varphi(0)$.

Tomemos $f(t) = 1-t$ e $g(t) = \varphi'(t)$, de modo que $f'(t) = -1$ e $\int_0^1 \varphi'(t)\,dt = -\int_0^1 f' \cdot g$. Com este sinal menos, a fórmula de integração por partes fica: (Note as posições de 0 e 1 no símbolo $f \cdot g]_1^0$.)

$$\int_0^1 \varphi'(t)\,dt = f \cdot g]_1^0 + \int_0^1 f \cdot g' = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt.$$

Chegamos assim a um resultado interessante. Se φ possui derivada segunda integrável no intervalo $[0,1]$ então

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \cdot \varphi''(t)\,dt.$$

Suponhamos agora que φ possua derivada terceira integrável em $[0,1]$ e tentemos a sorte outra vez na integração por partes. Escrevamos agora $f(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$ e $g(t) = \varphi''(t)$. Então $f'(t) = -(1-t)$ e $\int_0^1 (1-t)\cdot\varphi''(t)\,dt = -\int_0^1 f'\cdot g$. Com este sinal menos, a fórmula de integração por partes nos dá:

$$\int_0^1 (1-t)\cdot\varphi''(t)\,dt = f\cdot g]_1^0 + \int_0^1 f\cdot g' = \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\cdot\varphi'''(t)\,dt.$$

Então podemos escrever

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\,\varphi'''(t)\,dt.$$

Isto nos conduz imediatamente ao

Lema 6. *Seja* $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função que possui derivada de ordem* $n+1$ *integrável em* $[0,1]$. *Então*

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\cdot\varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Como conseqüência direta:

Teorema 13. (Fórmula de Taylor com resto integral). *Se* $f\colon [a, a+h] \to \mathbb{R}$ *possui derivada de ordem* $n+1$ *integrável então*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(a+th)\,dt\right]\cdot h^{n+1}.$$

Demonstração. Dada f, defina $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(t) = f(a+th)$. Então $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)\cdot h^i$. Em seguida, aplique o lema acima.

Observação: Ao usarmos a notação $[a, a+h]$, estamos tacitamente admitindo $h \geq 0$. É evidente, porém que a mesma fórmula vale para $h < 0$, pois a definição de φ não leva isto em conta.

Escrevendo $b = a + h$, obteremos uma expressão equivalente para a fórmula de Taylor substituindo h por $b - a$. No resto, a mudança de variável $x = a + th$, com $dx = h \cdot dt$, nos dará

$$f(b) = f(a) + f'(a) \cdot (b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x)\, dx.$$

Com efeito, temos $h = b - a$ e $th = x - a$. Logo $h - th = b - x$. No integrando da fórmula anterior escrevemos $(1-t)^n \cdot h^{n+1} dt = (h - th)^n \cdot h dt = (b-x)^n dx$. O outro fator, $f^{(n+1)}(a + th)$ se torna simplesmente $f^{(n+1)}(x)$. O denominador $n!$, é claro, fica como está. E os limites de integração são a e b, pois quando t varia entre 0 e 1, estes são os extremos assumidos por $a + th$.

5 A integral como limite de somas

Seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Chamaremos *norma* de P ao número $|P|$ = maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P.

Mostraremos inicialmente que a integral superior de uma função limitada f é o limite das somas superiores $S(f; P)$ quando a norma da partição P tende a zero. Isto se escreve

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{|P| \to 0} S(f; P).$$

O significado preciso da fórmula acima é dado pelo

Teorema 14. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $S(f;p) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$ *qualquer que seja a partição* P *com norma menor do que* δ.

Demonstração. Suponhamos primeiro que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Seja M o sup de f em $[a,b]$. Tomemos δ tal que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2M\cdot n}\cdot$ Seja agora P uma partição arbitrária com norma menor do que δ. Indiquemos com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0. Escreveremos $\alpha \subset i$ para significar que $[r_{\alpha-1}, r_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Chamemos de $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os intervalos restantes de P. Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior. Logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Se $\alpha \subset i$ então $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha\subset i}(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos ≥ 0, logo $\sum_{\alpha\subset i} M_\alpha\cdot(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta\cdot(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M\cdot\delta$. Assim:

$$
\begin{aligned}
S(f;P) &= \sum_\alpha M_\alpha\cdot(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta\cdot(r_\beta - r_{\beta-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(t_i - t_{i-1}) + M\cdot n\cdot\delta \\
&< S(f;P_0) + \varepsilon/2 < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Tomando $g(x) = f(x) + c$ recaímos no caso anterior pois $S(g;P) = S(f;P) + c(b-a)$ e $\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + c\cdot(b-a)$.

Corolário. *A integral inferior de uma função limitada* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é o limite das somas inferiores* $s(f;P)$ *quando a norma da partição* P *tende a zero, ou seja,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} s(f;P).$$

Com efeito, $-s(f;P) = S(-f;P)$ e $-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} -f(x)\,dx.$

Em seguida, caracterizaremos as funções integráveis e exprimiremos suas integrais em termos de limites de somas.

Pontilhar uma partição $P = \{t_0,\ldots,t_n\}$ é escolher, em cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$ um ponto ξ_i. Portanto, $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$.

Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P^* uma *partição pontilhada* (P era a partição antes de a pontilharmos.)

Formemos a *soma de Riemann:*

$$\sum(f;P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, seja qual for a maneira de pontilhar a partição P, temos

$$s(f;P) \leq \Sigma(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, diremos que o número real I é o *limite* de $\Sigma(f;P^*)$ quando a norma $|P|$ tende para zero, e escreveremos

$$I = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f;P^*),$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|\Sigma(f;P^*) - I| < \varepsilon$, seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

Teorema 15. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Existe o limite* $I = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f;P^*)$ *se, e somente se,* f *for integrável. No caso afirmativo, tem-se* $I = \int_a^b f(x)\,dx.$

Demonstração. Seja f integrável. Pelo Teorema 14, temos então $\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = \lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \int_a^b f(x)\,dx$. Como $s(f;P) \leq \Sigma(f;P^*) \leq S(f;P)$, resulta imediatamente que $\lim_{|P|\to 0} \Sigma(f;P^*) = \int_a^b f(x)\,dx$. Reciprocamente, suponhamos que exista o limite I e mostremos que f é integrável. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que $|\Sigma(f;P^*) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ seja qual for a maneira de pontilhar P. Fixemos P e a pontilhemos de duas maneiras. Em primeiro lugar, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ podemos escolher um ponto ξ_i tal que $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{4n(t_i - t_{i-1})}\cdot$ Isto nos dará uma partição pontilhada P^* tal que

$$\Sigma(f;P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= s(f;P) + \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

De maneira semelhante, obtemos uma partição pontilhada $P^{\#}$ tal que $S(f;P) - \frac{\varepsilon}{4} < \Sigma(f;P^{\#})$. Desta maneira:

$$\Sigma(f;P^*) - \frac{\varepsilon}{4} < s(f;P) \leq S(f;P) < \Sigma(f;P^{\#}) + \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Como os números $\Sigma(f;P^*)$ e $\Sigma(f;P^{\#})$ pertencem ao intervalo $\left(I - \frac{\varepsilon}{4}, I + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, segue-se que $s(f;P)$ e $S(f;P)$ pertencem ao intervalo $\left(I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e, portanto, $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Logo f é integrável. Evidentemente $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Exemplos.

10a. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Dada uma seqüência (P_n^*) de partições pontilhadas com $\lim_{n\to\infty} |P_n^*| = 0$, re-

sulta imediatamente da definição que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f;P_n^*)$.

Consideremos, por exemplo, a função $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$ Sabemos que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n = \left\{1, \dfrac{n+1}{n}, \dfrac{n+2}{n}, \ldots, \dfrac{2n}{n}\right\}$ a partição que consiste em subdividir $[1,2]$ em n partes iguais, cada uma com comprimento $\dfrac{1}{n}\cdot$ Pontilhemos P_n tomando em cada intervalo $\left[\dfrac{n+i-1}{n}, \dfrac{n+i}{n}\right]$ o ponto $\xi_i = \dfrac{n+i}{n}\cdot$ Para cada $i = 1, \ldots, n$ temos então $f(\xi_i) = f\left(\dfrac{n+i}{n}\right) = \dfrac{n}{n+i}$ e $t_i - t_{i-1} = \dfrac{1}{n}\cdot$ Logo $f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \dfrac{1}{n+i}\cdot$ A soma de Riemann desta partição pontilhada é, portanto,

$$\Sigma(f;P_n^*) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\cdot$$

Concluímos então que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2,$$

11. *Valor médio de uma função num intervalo.* Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Dividindo o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais obtemos a partição $P_n = \{a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh\}$, onde $h = \dfrac{b-a}{n}\cdot$ A média aritmética dos n números $f(a+h), f(a+2h), \ldots, f(a+nh) = f(b)$ será indicada pela notação $M(f;n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$. É natural definir o *valor médio* de f no intervalo $[a,b]$ como o limite $M(f;[a,b]) = \lim_{n\to\infty} M(f;n)$. Escolhendo em cada intervalo $[a+(i-1)h, a+ih]$ o ponto $a+ih$ obtemos

uma partição pontilhada P_n^* tal que $\Sigma(f;P_n^*) = \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)\cdot h = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$. Logo $M(f;n) = \frac{1}{b-a}\Sigma(f;P_n^*)$. Segue-se que o valor médio de f no intervalo $[a,b]$ tem a expressão

$$M(f;[a,b]) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\Sigma(f;P_n^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Em particular, se f está definida no intervalo $[a, a+1]$, seu valor médio nesse intervalo é igual a $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$.

6 Caracterização das funções integráveis

Nosso próximo objetivo é caracterizar as funções integráveis como aquelas cujos pontos de descontinuidade formam conjuntos que são "pequenos". Isto será feito mediante a noção de conjunto de *medida nula* (segundo Lebesgue). Iniciaremos, porém, com o conceito de conjunto de *conteúdo nulo* (segundo Jordan).

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diremos que X tem *conteúdo nulo*, e escreveremos $c(X) = 0$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção finita de intervalos abertos $I_1,\ldots,I_k$ tal que $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$ e a soma dos comprimentos dos intervalos I_j seja $< \varepsilon$.

Indiquemos com $|I| = b - a$ o comprimento de um intervalo I cujos extremos são a e b.

Então $c(X) = 0 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0$ pode-se fazer $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$ onde $I_1,\ldots,I_k$ são intervalos abertos, com $|I_1| + \cdots + |I_k| < \varepsilon$.

Não exigimos que os intervalos abertos $I_1,\ldots,I_k$ sejam disjuntos. Mas o conjunto aberto $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ pode ser expresso, de modo único, com reunião de intervalos abertos *disjuntos* $J_1,\ldots,J_r$ $(r \le k)$.

O lema abaixo é uma reformulação da Proposição 1, Capítulo V.

Lema 7. *Sejam* $I_1, \ldots, I_k$ *e* $J_1, \ldots, J_r$ *intervalos abertos, os* J_i *sendo dois a dois disjuntos. Se* $I_1 \cup \cdots \cup I_k = J_1 \cup \cdots \cup J_r$ *então* $|J_1| + \cdots + |J_r| \leq |I_1| + \cdots + |I_k|$, *ocorrendo a igualdade somente quando os* I_j *forem também dois a dois disjuntos (e portanto coincidirem com os* J_i *a menos da numeração).*

Demonstração. Lembremos que a função característica de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é a função $\xi_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$. É fácil provar que, dados $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{R}$, com $Y = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, tem-se $\xi_Y \leq \sum_{j=1}^{k} \xi_{X_j}$, ocorrendo a igualdade somente se os X_j forem dois a dois disjuntos. Se X é um intervalo então $X \subset [a, b]$ implica $\int_a^b \xi_X = |X|$. Portanto, sendo os J_i dois a dois disjuntos e $[a, b]$ um intervalo contendo a reunião $Y = I_1 \cup \cdots \cup I_k = J_1 \cup \cdots \cup J_r$, temos $\sum_{i=1}^{r} \xi_{J_i} = \xi_Y \leq \sum_{j=1}^{k} \xi_{I_j}$ e, daí,

$$\sum_{i=1}^{r} |J_i| = \sum \int_a^b \xi_{J_i} = \int_a^b \sum \xi_{J_i} \leq \int_a^b \sum \xi_{I_j}$$

$$= \sum \int_a^b \xi_{I_j} = \sum_{j=1}^{k} |I_j|.$$

Quando dois intervalos abertos I_j e I_l tiverem um ponto em comum, terão também um intervalo comum e então $\xi_Y(x) < \Sigma \xi_{I_j}(x)$ num intervalo, donde resulta $<$ no final.

Corolário. *Seja* $X \subset [a, b]$ *um conjunto de conteúdo nulo. Dado* $\varepsilon > 0$, *existe uma partição* P *de* $[a, b]$ *tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de* P *que contêm algum ponto de* X *é* $< \varepsilon$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k$ tais que $I_1 \cup \cdots \cup I_k \supset X$ e $\Sigma |I_j| < \varepsilon$. Podemos escrever $\cup I_j = \cup J_i$, onde os intervalos abertos J_i são dois a dois disjuntos e $\Sigma |J_i| < \varepsilon$.

As extremidades dos J_i contidas em $[a, b]$, juntamente com os pontos a e b, formam uma partição P de $[a, b]$ como se requer no enunciado do corolário.

Os conjuntos de conteúdo nulo gozam das seguintes propriedades, de demonstração imediata:

1. Se $c(X) = 0$, então X é limitado;

2. Se $c(X) = 0$ e $Y \subset X$, então $c(Y) = 0$;

3. Se $c(X_1) = \cdots = c(X_n) = 0$, então $c(X_1 \cup \cdots \cup X_n) = 0$;

4. Se, para cada $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k$ e um subconjunto finito $F \subset X$, tais que $X - F \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$ e $|I_1| + \cdots + |I_k| < \varepsilon$, então $c(X) = 0$.

Provemos a propriedade 4. Dado $\varepsilon > 0$, podemos obter um subconjunto finito $F \subset X$ e intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k$ tais que $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $X - F \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Por outro lado, podemos obter intervalos abertos $I_{k+1}, \ldots, I_n$ tais que $F \subset I_{k+1} \cup \cdots \cup I_n$ e $\sum_{k+1}^{n} |I_r| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$ Segue-se que $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_n$ e $\sum_{j=1}^{n} |I_j| < \varepsilon$. Logo $c(X) = 0$.

A propriedade 4 acima implica que, na definição de $c(X) = 0$, poderíamos ter utilizado intervalos *fechados*, sem alterar o significado do conceito. Com efeito, se X for coberto por um número finito de intervalos fechados, cuja soma dos comprimentos é $< \varepsilon$ então os intervalos abertos correspondentes têm igual soma de comprimentos e deixam de cobrir no máximo um subconjunto finito de X formado por extremidades dos intervalos.

Em particular, obtemos a recíproca do corolário acima: se $X \subset [a, b]$ e, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$, tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de X é $< \varepsilon$, então, $c(X) = 0$.

Exemplos.

12. Seja $X = \mathbb{Q} \cap [a, b]$, com $a < b$. Trata-se de um conjunto enumerável que não tem conteúdo nulo. Com efeito, se fosse $c(X) = 0$, então, dado $\varepsilon < b - a$, existiria uma partição P de $[a, b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P contendo pontos de X seria $< \varepsilon$. Ora, a soma dos comprimentos de todos os intervalos de P é $b - a$. Logo alguns intervalos de P não conteriam pontos de X, isto é, números racionais, o que é absurdo. Segue-se que um intervalo $[a, b]$, não-degenerado, não tem conteúdo nulo.

13. Seja $K \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor. Tem-se aqui um conjunto não-enumerável cujo conteúdo é nulo. Com efeito, depois da n-ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, foram omitidos intervalos abertos cuja soma dos comprimentos é

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

A n-ésima etapa da construção de K fornece uma partição P de $[0, 1]$ tal que os pontos de K estão contidos nos intervalos de P que não foram omitidos. Como a soma dos comprimentos dos intervalos de P é 1, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de K é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Tomando n grande, podemos fazer esta soma tão pequena quanto se deseje. Logo $c(K) = 0$. [Estamos usando a propriedade 4 acima pois os intervalos da partição com os quais cobrimos K são fechados.]

A oscilação de uma função limitada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ num conjunto $X \subset [a, b]$ já foi definida como

$$\omega(f; X) = \sup f(X) - \inf f(X) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}.$$

Evidentemente, $X \subset Y \Rightarrow \omega(f; X) \leq \omega(f; Y)$.

Definiremos agora a *oscilação de* f *num ponto* $x \in [a, b]$.

Fixemos x, f e escrevamos, para cada $\delta > 0$, $\omega(\delta) =$ oscilação de f no conjunto $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$.

Se $a < x < b$ e δ é suficientemente pequeno, então $\omega(\delta) = \omega(f;(x-\delta, x+\delta))$. Se $x = a$ e $\delta \leq b - a$, então $\omega(\delta) = \omega(f;[a, a+\delta))$. Se $x = b$ e $\delta \leq b - a$, então $\omega(\delta) = \omega(f;(b-\delta, b])$.

Mantendo sempre f e x fixos, $\omega(\delta)$ é uma função monótona não-decrescente de δ, definida num intervalo $(0, \delta_0)$. Como f é limitada, a função $\delta \mapsto \omega(\delta)$ também é limitada. Existe, portanto, o limite

$$\omega(f;x) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = \inf\{\omega(\delta); \delta > 0\},$$

que chamaremos a *oscilação de* f *no ponto* x.

Sejam $L(x)$ e $l(x)$ respectivamente o limite superior e o limite inferior da função f no ponto x. Ao calcularmos estes limites não levamos em conta o valor de f no ponto x. Por isso não se tem $\omega(f;x)$ igual à diferença $L(x) - l(x)$. Entretanto o leitor pode verificar que $\omega(f;x)$ é a diferença entre o maior e o menor dos 3 números, $l(x)$, $L(x)$ e $f(x)$. Ora, f é contínua no ponto x se, e somente se, esses 3 números são iguais. Logo f é contínua no ponto x se, e somente se, $\omega(f;x) = 0$. Este fato é importante para o que se segue. Por isso lhe daremos uma demonstração independente.

Teorema 16. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. A fim de que* f *seja contínua no ponto* $x_0 \in [a,b]$ *é necessário e suficiente que* $\omega(f;x_0) = 0$.

Demonstração. Suponhamos f contínua no ponto $x_0 \in [a,b]$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \Rightarrow f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \omega(\delta) < \varepsilon$. Logo $\omega(f;x_0) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Reciprocamente, supondo $\omega(f;x_0) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(\delta) < \varepsilon$, ou seja $x, y \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Em particular, $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Logo f é contínua no ponto x_0.

O próximo teorema diz que a oscilação $x \mapsto \omega(f;x)$ é uma função *semicontínua superiormente* no intervalo $[a,b]$. Os corolários enunciam propriedades gerais das funções semicontínuas superiormente.

Teorema 17. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Dado* $x_0 \in [a,b]$, *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in [a,b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow \omega(f;x) < \omega(f;x_0) + \varepsilon$.

Demonstração. Resulta imediatamente da definição de $\omega(f;x_0)$ que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que a oscilação de f no conjunto $X = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ é menor do que $\omega(f;x_0) + \varepsilon$. Ora, para cada $x \in X$, tem-se $\omega(f;x) \leq \omega(f;X)$. Isto prova o teorema.

Corolário 1. *Se* $\omega(f;x_0) < \alpha$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \omega(f;x) < \alpha$.

Com efeito, basta escrever $\alpha = \omega(f;x_0) + \varepsilon$ e tomar o δ que corresponde a este ε pelo Teorema 17.

Corolário 2. *Para todo* $\alpha > 0$, *o conjunto* $E_\alpha = \{x \in [a,b];\ \omega(f;x) \geq \alpha\}$ *é compacto.*

Com efeito, pelo Corolário 1, o complementar $\mathbb{R} - E_\alpha$ é aberto. Logo E_α é fechado. Estando contido em $[a,b]$, E_α é limitado. Portanto é compacto.

Corolário 3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *seja* $x_n \in [a,b]$ *e* $\lim x_n = x$. *Se existir* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f;x_n) = L$ *será* $L \leq \omega(f;x)$. *Em outros termos:* $\lim \omega(f;x_n) \leq \omega(f;\lim x_n)$.

Com efeito, se fosse $L > \omega(f;x)$, tomaríamos $\varepsilon = \frac{1}{2}[L - \omega(f;x)]$ e teríamos $L - \varepsilon = \omega(f;x) + \varepsilon$. Pelo Teorema 17, para todo n suficientemente grande valeria $\omega(f;x_n) < \omega(f;x) + \varepsilon$, ou seja $\omega(f;x_n) < L - \varepsilon$, o que contradiz ser $\lim \omega(f;x_n) = L$.

Exemplo 14. Para a função $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, a oscilação é dada por $\omega(f;x) = 0$ se $x \neq 0$ e $\omega(f;0) = 2$. Se

$g(x) = 0$ para x irracional, $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ se $\frac{p}{q}$ é irredutível com $q > 0$ e $g(0) = 0$, então a oscilação é $\omega(g;x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $h(x) = 0$ para x racional e $h(x) = 1$ para x irracional então $\omega(h;x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 18. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Se* $\omega(f;x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então existe uma partição* P *de* $[a,b]$ *tal que* $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$ *em todos os intervalos* $[t_{i-1}, t_i]$ *da partição.*

Demonstração. Pela definição de oscilação, cada $x \in [a,b]$ está contido num intervalo aberto I_x tal que a oscilação de f em $\bar{I}_x \cap [a,b]$ é inferior a ε. Da cobertura $[a,b] \subset \cup I_x$ extraímos, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, uma subcobertura finita $[a,b] \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Os pontos a, b, juntamente com as extremidades dos intervalos I_{x_j} que pertençam a $[a,b]$, determinam uma partição P com as propriedades requeridas.

Teorema 19. *Uma função limitada* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável se, e somente se, para todo* $\delta > 0$, *o conjunto* $E_\delta = \{x \in [a,b]; \omega(f;x) \geq \delta\}$ *tem conteúdo nulo.*

Demonstração. Seja f integrável. Dados $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ relativamente à qual se tem $\Sigma\omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot \delta$. Se um intervalo $[t'_{i-1}, t'_i]$ de P contém algum ponto de E_δ em seu interior, então a oscilação de f nesse intervalo é $\geq \delta$. Se, na soma $\Sigma\omega_i(t_i - t_{i-1})$, nos restringirmos às parcelas correspondentes aos intervalos que contêm pontos de E_δ em seu interior, obteremos a relação $\delta \cdot \Sigma(t'_i - t'_{i-1}) < \varepsilon \cdot \delta$ e, portanto, a soma dos comprimentos dos intervalos de P contendo algum ponto de E_δ em seu interior é $\Sigma(t'_i - t'_{i-1}) < \varepsilon$. Estes intervalos podem não cobrir E_δ, mas deixam de fora no máximo os pontos de P, que são em número finito. Logo $c(E_\delta) = 0$. Reciprocamente, seja $c(E_\delta) = 0$ para todo $\delta > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon/2(b-a)$. Pelo corolário do Lema 7, existe uma partição P_0 de $[a,b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P_0 que contêm algum ponto de E_δ é menor do que $\varepsilon/2(M-m)$, onde $M = \sup f$ e $m = \inf f$. Os intervalos restantes

podem ser subdivididos (veja o Teorema 18) de modo a se obter uma partição P (refinando P_0) com $\omega_i < \delta$ nos intervalos que não contêm pontos de E_δ. Relativamente a P, podemos escrever $\Sigma\omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \Sigma\omega_i'(t_i' - t_{i-1}') + \Sigma\omega_i'' \cdot (t_i'' - t_{i-1}'')$ onde o primeiro somatório refere-se aos intervalos de P que contêm pontos de E_δ. Então $\omega_i' < M - m$ e $\Sigma(t_i' - t_{i-1}') < \varepsilon/2(M-m)$. Logo o primeiro somatório é $< \varepsilon/2$. O segundo somatório corresponde aos intervalos de P que não contêm pontos de E_δ. Neles, $\omega_i'' < \delta$ e, portanto, o somatório é $< \delta \cdot (b-a) = \varepsilon/2$. Assim $\Sigma\omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ e f é integrável.

Para obter a forma definitiva de caracterizar as funções integráveis, indroduziremos a noção de conjunto de medida nula.

Diremos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula (à Lebesgue) e escreveremos $m(X) = 0$, quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ tais que $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_n \cup \ldots$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

Em particular, se X tem conteúdo nulo, então $m(X) = 0$.

Valem as seguintes propriedades:

(1) Se $m(X) = 0$ e $Y \subset X$, então $m(Y) = 0$; $m(\emptyset) = 0$;

(2) Se X é compacto e $m(X) = 0$, então $c(X) = 0$;

(3) Se $Y = X_1 \cup \cdots \cup X_n \cup \ldots$, onde $m(X_1) = \cdots = m(X_n) = \cdots = 0$, então $m(Y) = 0$. Em palavras: uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.

Provemos (3). Dado $\varepsilon > 0$ podemos, para cada n, escrever $X_n \subset I_{n1} \cup \cdots \cup I_{nj} \cup \ldots$ onde os I_{nj} são intervalos abertos tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |I_{nj}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ · Segue-se que $Y \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} I_{n_j}$, onde $\sum_n \sum_j |I_{n_j}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Logo $m(Y) = 0$.

Em particular, como um ponto tem medida nula, todo conjunto enumerável tem medida nula. Assim, por exemplo, $m(\mathbb{Q}) = 0$ e, com maior razão, os números racionais contidos

num intervalo $[a, b]$ formam um conjunto de medida nula, o qual, como sabemos, não tem conteúdo nulo.

(4) Se, para cada $\varepsilon>0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ e um subconjunto enumerável $E \subset X$ tais que $X - E \subset I_1 \cup \cdots \cup I_n \cup \ldots$ e $\Sigma|I_n| < \varepsilon$, então $m(X) = 0$.

A demonstração de (4) é análoga à da proposição semelhante para conjuntos de conteúdo nulo.

Segue-se de (4) que, ao definirmos conjuntos de medida nula, poderíamos ter usado intervalos fechados, sem que isto alterasse o conceito definido. Com efeito, se $X \subset J_1 \cup \cdots \cup J_n \cup \ldots$, onde os J_n são intervalos fechados com $\Sigma|J_n| < \varepsilon$, então, pondo I_n = interior de J_n e E = conjunto das extremidades dos J_n, temos $X - E \subset \cup I_n$, E enumerável e $|I_n| = |J_n|$, donde $\Sigma|I_n| < \varepsilon$.

Teorema 20. *Para que uma função limitada* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja integrável, é necessário e suficiente que o conjunto* D *dos seus pontos de descontinuidade tenha medida nula.*

Demonstração. Com a notação do Teorema 19, temos

$$D = \bigcup_{\delta>0} E_\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1/n}.$$

Se $m(D) = 0$, então, para cada $\delta > 0$, o conjunto compacto E_δ tem medida nula e, portanto, conteúdo nulo. Pelo Teorema 19, f é integrável. Reciprocamente, se f é integrável então, ainda pelo Teorema 19, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $E_{1/n}$ tem conteúdo nulo, e, portanto, medida nula. Segue-se que D é reunião enumerável de conjuntos de medida nula e, portanto, $m(D) = 0$.

Corolário 1. *Se* $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *são integráveis então o produto* $f \cdot g$ *é integrável. Se, além disso,* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$ *e* $1/f$ *é limitada, então* $1/f$ *é integrável.*

Corolário 2. *Seja* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é enumerável, então* f *é integrável. Em particular, se existem os limites laterais de* f *em cada ponto de* $[a, b]$ *então* f *é integrável. Mais particularmente ainda, se a função limitada* f *é monótona, então é integrável.*

7 Logaritmos e exponenciais

Seja a um número real maior que 1. Tradicionalmente, define-se o logaritmo de um número real $x > 0$, na base a, como o expoente y, a que se deve elevar a base a para obter x. Ou seja, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$. Em outras palavras, a função $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é definida como a inversa da função exponencial $y \mapsto a^y$. Esta definição requer, portanto, o trabalho preliminar de estabelecer o significado e as propriedades das potências a^y, onde o expoente y é um número real qualquer. Isto pode ser feito rigorosamente, (veja o Exercíco 12, Cap. VI) mas é mais simples definir primeiro os logaritmos e, a partir destes, a exponencial, como faremos aqui. As propriedades de ambas funções são provadas bem mais facilmente. Além disso, a definição de logaritmo por meio de integral, ou seja, como uma área, deixa imediatamente disponível a intuição geométrica, a partir da qual podemos perceber e provar desigualdades. Mesmo em nível elementar, sem pressupor conhecimento algum de Cálculo, podem-se estudar logaritmos desta maneira. Veja, por exemplo, a monografia do autor citada na bibliografia.

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Definiremos a função real $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $x > 0$,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

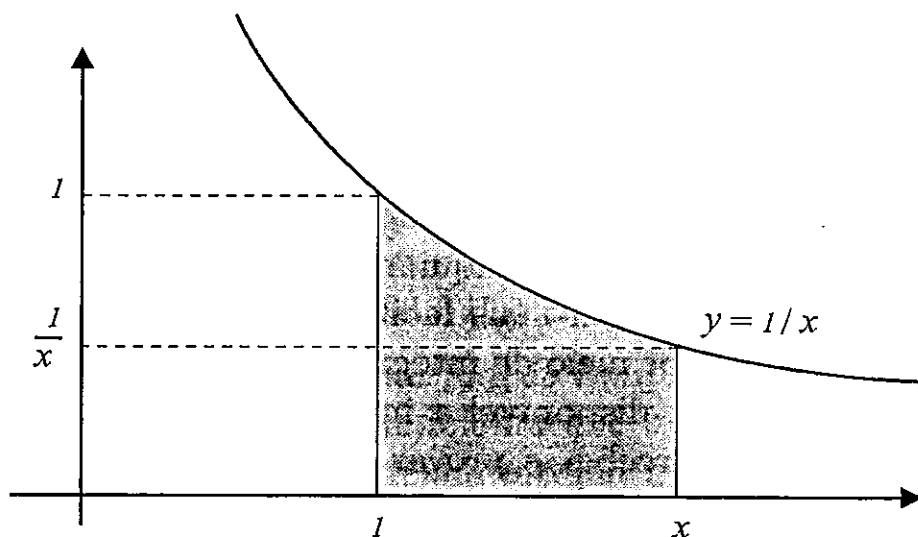
O número $\log x$ será chamado o *logaritmo natural* de x ou, simplesmente, o *logaritmo* de x. Note-se enfaticamente que $\log x$ não está definido para $x \leq 0$.

Lembremos a convenção sobre os extremos do intervalo de integração: $\int_a^a f = 0$ e $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Temos pois:

$$\log 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log x < 0 \quad \text{quando} \quad 0 < x < 1.$$

Evidentemente, quando $x > 1$, $\log x > 0$ por ser a integral da função positiva $1/t$ no intervalo $[1, x]$.

Segue-se ainda diretamente da definição que $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente e, com efeito, derivável, com $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

Portanto, $(\log)''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, etc. Vemos que log é infinitamente derivável, ou seja $\log \in C^\infty$.

log x é a área da região hachurada

Quando $x > 1$, $\log x$ é a área da "faixa de hipérbole" $H_1^x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le t \le x,\ 0 \le y \le 1/t\}$. Quando $0 < x < 1$, $\log x$ é a área da faixa H_x^1 com o sinal trocado.

A propriedade fundamental dos logaritmos é dada pelo

Teorema 21. *Sejam* x, y *números positivos. Tem-se* $\log(xy) = \log x + \log y$.

Demonstração. Temos $\log(xy) = \displaystyle\int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log x + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}\cdot$

Resta apenas mostrar que $\displaystyle\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log y$. Ora, quando s varia de 1 a y, o produto xs varia de x a xy. Assim a mudança

de variável $t = xs$, $dt = xds$ nos dá $\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{xds}{sx} = \int_1^y \frac{ds}{s} =$ $\log y$, o que demonstra o teorema.

Corolário 1. *Seja* $x > 0$. *Para todo número racional* r, *tem-se* $\log(x^r) = r \cdot \log x$.

Consideremos primeiro um número natural n. Segue-se diretamente do Teorema 21 que $\log(x^n) = n \cdot \log x$. Como $x^n \cdot x^{-n} = 1$, temos $0 = \log 1 = \log(x^n \cdot x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n \cdot \log x + \log(x^{-n})$ e, portanto, $\log(x^{-n}) = -n \cdot \log x$. Fica estabelecido o corolário quando $r \in \mathbb{Z}$. No caso geral, temos $r = p/q$, com p e q inteiros. Por definição, temos $(x^{p/q})^q = x^p$. Usando o que já foi demonstrado até aqui, vem $p \cdot \log x = \log(x^p) = \log[(x^{p/q})^q] = q \cdot \log(x^{p/q})$. Segue-se que $\log(x^{p/q}) = \frac{p}{q} \log x$. Isto termina a demonstração do corolário.

Antes do próximo corolário, lembremos que, se X, Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$, um homeomorfismo $f \colon X \to Y$ é uma função contínua, bijetiva, cuja inversa $f^{-1} \colon Y \to X$ também é contínua. (veja Capítulo VII, §§ 3 e 4.)

Corolário 2. *A função* $\log \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é um homeomorfismo de* $\mathbb{R}^+$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Com efeito, log é contínua e crescente (donde injetiva). Pelo Teorema 13 do Capítulo VII, a inversa de log é contínua no intervalo onde for definida. Portanto, resta somente mostrar que log é sobrejetiva. Como a imagem de log é um intervalo (Corolário 2 do Teorema 12, Capítulo VII), basta que provemos que $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ e que $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$. Ora, temos $\log(2^n) = n \cdot \log 2$. Segue-se que $\lim_{n \to \infty} \log(2^n) = +\infty$. Como log é crescente, isto já nos dá $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$. Considerando 2^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, obtemos o outro limite.

O corolário acima diz que todo número real y é logaritmo de um único número real $x > 0$ e que a correspondência $y \mapsto x$ é contínua. Juntamente com o Teorema 21, isto significa que log

é um isomorfismo contínuo do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$ sobre o grupo aditivo $\mathbb{R}$ e seu isomorfismo inverso também é contínuo.

O Exercício 33 abaixo estabelece que os únicos homomorfismos contínuos $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são os da forma $f(x) = c \cdot \log x$, com $c \in \mathbb{R}$ constante.

A bijetividade de log implica, em particular, que existe um número real positivo cujo logaritmo é 1. Tal número é indicado pelo símbolo e. Ele é a chamada "base" dos logaritmos naturais. Sua definição é a igualdade:

$$\log e = 1.$$

Mostraremos, logo mais, que $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ou seja, que e coincide com o número introduzido nos Exemplos 8, 9 e 16 do Capítulo IV.

Definimos a *função exponencial* $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como sendo a inversa da função logaritmo. Assim, por definição,

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x.$$

Em particular, $\exp(\log y) = y$ e $\log[\exp(x)] = x$. As propriedades do logaritmo nos dão imediatamente o

Teorema 22. *A função exponencial é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. Ela é infinitamente diferenciável, com $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer, vale $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Para todo r racional tem-se $\exp(r) = e^r$.*

Demonstração. Como $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ foi definida como a inversa de uma bijeção crescente, ela goza também destas propriedades. Além disso, pela regra de derivação da função inversa, para cada $x \in \mathbb{R}$, com $\exp(x) = y$, temos $(\exp)'(x) = \frac{1}{(\log)'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x)$. Assim, a função derivada de exp é a própria função exp. Por conseguinte, ela é uma função de classe C^∞. Para provar que $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, sejam $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$. Então $x = \log x'$, $y = \log y'$.

Daí, $\exp(x+y) = \exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = x' \cdot y' = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Analogamente, se r é racional, o Corolário 1 do Teorema 21 fornece: $\exp(r \cdot x) = \exp(r \cdot \log x') = \exp[\log(x')^r] = (x')^r = [\exp(x)]^r$. A igualdade $\log e = 1$ dá $\exp(1) = e$. Fazendo $x = 1$ na relação acima demonstrada, obtemos $\exp(r) = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

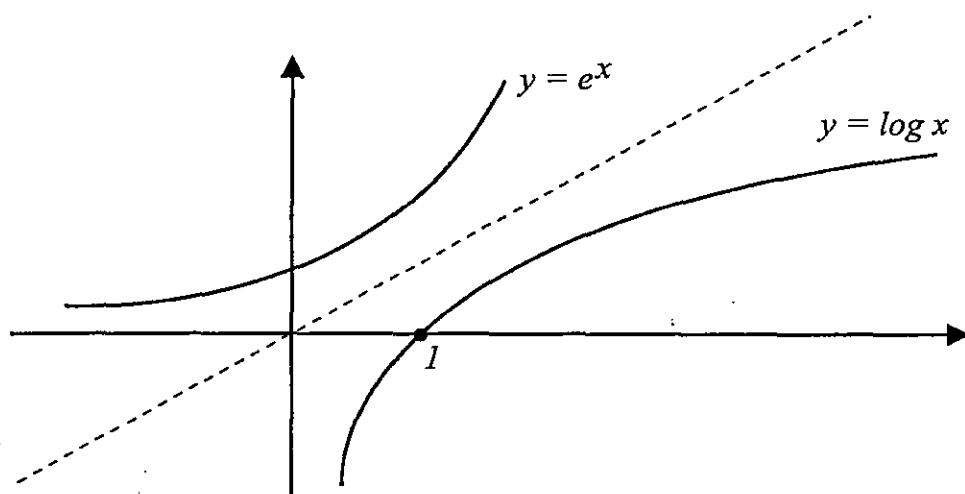
Temos ainda: $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$. Estes fatos decorrem imediatamente dos limites análogos para log.

A igualdade $\exp(r) = e^r$ quando r é racional, juntamente com a relação $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, nos indicam que $\exp(x)$ se comporta como uma potência de base e e expoente x. Escreveremos, portanto,

$$\exp(x) = e^x$$

e com isto daremos significado a uma potência de e com expoente real qualquer.

Com a nova notação, temos $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^0 = 1$, $e^{-x} = 1/e^x$, $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$, $\log(e^x) = x$ e $e^{\log x} = x$.

Na figura abaixo, apresentamos os gráficos das funções $y = \log x$ e $y = e^x$. Como essas funções são inversas uma da outra, seus gráficos são simétricos relativamente à diagonal $y = x$.

Estes gráficos nos indicam que, embora ambas as funções, e^x e $\log x$, tendam para $+\infty$ quando $x \to +\infty$, a exponencial cresce

muito rapidamente, enquanto que o logaritmo tem um crescimento bastante lento. Com efeito, vimos no Exemplo 19, Capítulo VIII, que, para todo polinômio $p(x)$, temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$, o que comprova a rapidez do crescimento exponencial. Daí se pode deduzir a lentidão do crescimento logarítmico, mas preferimos proceder diretamente.

Teorema 23. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x > 1$ existe c, com $1 < c < x$ e $\log x = \log x - \log 1 = \frac{1}{c}(x-1)$. Portanto, $\log x < x$ para todo $x > 1$. Em particular, para $x > 1$ vem $0 < \log(x^{1/2}) < x^{1/2}$. Como $\log(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\log x$, elevando ao quadrado a última desigualdade, obtemos $0 < \frac{(\log x)^2}{4} < x$ e daí $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{4}{\log x}$ para todo $x > 1$. O Teorema 23 segue-se imediatamente.

Corolário. $\lim_{x\to 0}[x \cdot \log x] = 0.$

Com efeito, pondo $x = 1/y$, vem

$$\lim_{x\to 0}[x \cdot \log x] = \lim_{y\to\infty} \frac{\log(1/y)}{y} = \lim_{y\to\infty}\left[-\frac{\log y}{y}\right] = 0.$$

Se c e k são constantes reais, a função $f(x) = c \cdot e^{kx}$ tem como derivada $f'(x) = k \cdot c \cdot e^{kx} = k \cdot f(x)$. Esta propriedade de possuir uma derivada proporcional a si própria é responsável pelo interesse da função exponencial nas aplicações. Mostraremos agora que tal propriedade é exclusiva das funções do tipo acima.

Teorema 24. *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável tal que* $f'(x) = k \cdot f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Se, para um certo* $x_0 \in \mathbb{R}$, *tem-se* $f(x_0) = c$ *então* $f(x) = ce^{k(x-x_0)}$.

Demonstração. Consideremos $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(x)\cdot e^{-k(x-x_0)}$. Temos $\varphi'(x) = f'(x)\cdot e^{-k(x-x_0)} - k\cdot f(x)\cdot e^{-k(x-x_0)} = 0$. Logo φ é constante. Como $\varphi(x_0) = c$, segue-se que $\varphi(x) = c$ para todo x, o que demonstra o teorema.

Definiremos agora a potência a^x, onde x é um número real qualquer e $a > 0$. Faremos isto de modo que seja válida a fórmula $\log(a^x) = x \cdot \log a$.

A melhor maneira de conseguir isto é tomar a própria igualdade acima como definição. Ou seja, diremos que a^x é o (único) número real cujo logaritmo é igual a $x\cdot \log a$. Em outras palavras, pomos, por definição, $a^x = e^{x\cdot \log a}$.

Para cada $a > 0$ a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, goza das propriedades esperadas.

A primeira delas é que, para x racional, digamos $x = \dfrac{p}{q}$, com $q > 0$, $f(x) = \sqrt[q]{a^p}$. Com efeito, $f(x) = e^{p/q \log a} = e^{\log \sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[q]{a^p}$ pelo Corolário 1 do Teorema 21.

Tem-se $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, donde $a^0 = 1$ e $a^{-x} = 1/a^x$. Vale ainda $(a^x)^y = a^{xy}$.

A função $f\colon x \mapsto a^x$ é derivável, com $f'(x) = a^x\cdot \log a$. Segue-se que f é de classe C^∞. A derivada de f é positiva se $a > 1$ e negativa se $a < 1$. Logo f é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo. Se $a = 1$, então f é constante.

Quando $a > 1$ temos $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. Se $a < 1$, os valores destes limites são trocados. Em qualquer desses casos, $f\colon x \mapsto a^x$ é uma bijeção contínua de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. A função inversa indica-se com $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Seu valor $\log_a(x)$, num ponto $x > 0$, chama-se o *logaritmo de* x *na base* a.

Assim $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$. Retomamos a definição clássica.

Quando $a = e$, $\log_a x = \log x$ coincide com o logaritmo natural.

Para todo $x > 0$, temos

$$e^{\log x} = x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x\cdot \log a},$$

e, daí, $\log x = \log_a x \cdot \log a$, donde concluímos:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}\cdot$$

Esta é a relação entre o logaritmo de base a e o logaritmo natural. Dela resultam propriedades para $\log_a x$ análogas às de $\log x$. Por exemplo: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Ou então, a fórmula da derivada:

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \cdot \log a}\cdot$$

Para finalizar, mostraremos que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Começamos lembrando que a derivada da função $\log x$ é igual a $1/x$. No ponto $x = 1$, esta derivada vale 1. Isto significa que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

ou seja, $\lim_{x\to 0} \log[(1+x)^{1/x}]=1$. Como $(1+x)^{1/x}=\exp\{\log[(1+x)^{1/x}]\}$, vem: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Pondo $y = \frac{1}{x}$, vemos que

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exercícios

1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Prove que $\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx$. Dê um exemplo mostrando que uma desigualdade análoga não vale para integrais inferiores.

2. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. As seguintes afirmações são equivalentes:

   1. $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$;
   2. Se f é contínua no ponto c então $f(c) = 0$;
   3. $X = \{x \in [a,b]; f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f não é identicamente nula, então $\int_a^b |f(x)|\, dx > 0$.

4. Dê exemplo de uma função integrável que seja descontínua num conjunto infinito.

5. Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Defina $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, pondo $\varphi(x) = f(x)$ se x for racional e $\varphi(x) = g(x)$ para x irracional. Prove que

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} \varphi(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

   Conclua que φ é integrável se, e somente se, $f = g$.

6. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ não-negativa, limitada. Prove que $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\limits_{\xi} \int_a^b \xi(x)\, dx$, onde ξ percorre o conjunto das funções-escada tais que $\xi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que um resultado análogo vale se tomarmos ξ contínua ou ξ integrável (mantendo-se sempre a hipótese $\xi(x) \leq f(x)$ para todo x em $[a,b]$).

7. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\varphi\colon [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a,b]$ derivável e $c \in [a,b]$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:

   A. $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a,b]$ e $\varphi(t_0) = c$.

B. $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\, ds$ para todo $t \in [a, b]$.

8. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(0) = 0$ e, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $f'(x) = [f(x)]^2$. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Dê exemplo de uma função não-integrável que possua primitiva. [*Sugestão*: Ache uma função f, derivável em $[-1, +1]$, com f' ilimitada.]

10. Sejam $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Pontilhemos cada partição P de duas maneiras diferentes, escolhendo em todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ um ponto ξ_i e um ponto η_i. Mostre que

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

11. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ monótona com derivada g' integrável. Se

$$g([c, d]) \subset [a, b], \text{ então } \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t)\, dt.$$

12. Se $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ e $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ são integráveis então

$$\int_0^2 (x - 1) \cdot f[(x - 1)^2]\, dx = 0 = \int_0^{\pi} g(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x\, dx.$$

13. Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \dfrac{a + b}{2}$ e prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b - a} \int_a^b [f(x) + (x - m) f'(x)]\, dx.$$

14. Sejam $f, g\colon [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínuas e $K > 0$ tal que $\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| \leq K$ para quaisquer $c, d \in [a, +\infty)$. Se $g \in C^1$ é decrescente, com $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, prove que existe o limite

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)g(t)\,dt \quad \text{(integral imprópria).}$$

[*Sugestão*: Critério de Cauchy. Mostre que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A > a$ tal que $A < c < d \Rightarrow \left|\int_c^d f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon$. Para estimar esta integral, use o item C do Teorema 12.]

14a. Considerando funções escada convenientes, mostre que o Critério de Dirichlet (Teorema 21, Capítulo IV) é conseqüência do Exercício 14.

15. A integral imprópria $\int_0^\infty (\operatorname{sen} x/x)\,dx$ é convergente mas não converge absolutamente, isto é, pondo $F(x) = \int_0^x |\operatorname{sen} x/x|\,dx$, temos $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

16. Para cada inteiro p, com $0 \leq p \leq n$, escreva $(1-t)^n = (1-t)^{n-p}(1-t)^p$ na expressão do resto R_{n+1} da fórmula de Taylor como integral (veja o Teorema 13). Obtenha então

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!(p+1)} \cdot h^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Tomando $p = n$, reobtenha o resto de Lagrange e, fazendo $p = 0$, ache o resto de Cauchy:

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!} \cdot h^{n+1}.$$

Pondo $a + h = b$ e $a + \theta h = \xi$, o resto de Cauchy se torna

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a), \text{ onde } a < \xi < b.$$

17. Use o resto de Cauchy no desenvolvimento de Taylor de $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, para mostrar que a série de Taylor de f em torno do ponto 0, converge para $f(x)$ desde que $-1 < x < 1$. ("Série do Binômio".)

18. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Prove que f é integrável se, e somente se, existe um número real I com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter uma partição P_ε de $[a,b]$ tal que $|\Sigma(f; Q^*) - I| < \varepsilon$ seja qual for a partição pontilhada Q^* com $Q \supset P_\varepsilon$.

19. Diz-se que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *localmente limitada* no ponto x quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ é limitada. Prove que o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é localmente limitada é aberto. Mostre que se pode definir a oscilação de f nos pontos onde esta função é localmente limitada. Prove que o conjunto dos pontos onde uma função arbitrária $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua é uma interseção enumerável de abertos. Usando o Teorema de Baire (Exercício 54, Capítulo V), conclua que nenhuma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ter $\mathbb{Q}$ como o conjunto dos seus pontos de continuidade.

20. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Indiquemos com $\omega(x)$ a oscilação de f no ponto $x \in [a,b]$. Prove que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} \omega(x)\,dx.$$

21. Se um intervalo I tem medida nula, então I reduz-se a um ponto.

22. Todo conjunto de medida nula tem interior vazio.

23. Dadas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, seja $X = \{x \in [a,b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Se X tem medida nula então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

24. Dê exemplo de duas funções limitadas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tais que o conjunto $X = \{x \in [a,b]; f(x) \neq g(x)\}$ tenha medida nula, f seja integrável e g não seja.

25. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é lipschitziana (em particular, se $f \in C^1$) e $X \subset [a,b]$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

26. Seja K o conjunto de Cantor. Dê exemplo de uma função monótona contínua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $f(K)$ não tenha medida nula. (Veja o Exercício 17, Capítulo VII.)

27. Verifique que, a partir do item 4 do Teorema 4, todas as afirmações do texto, no sentido de que uma certa função é integrável, podem ser obtidas como conseqüências do Teorema 20.

28. Dadas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ defina as funções $f \wedge g$ e $f \vee g$ pondo $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se f e g são integráveis então $f \wedge g$ e $f \vee g$ são integráveis. Conclua que uma função é integrável se, e somente se, sua parte positiva e sua parte negativa são integráveis. (Veja Capítulo IV, §7.)

29. Seja $g \geq 0$ integrável. Se $\int_a^b g(x)dx = 0$ então $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, seja qual for f integrável.

30. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, para cada partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$, seja $V(f;P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Quando o conjunto $\{V(f;P); P = \text{partição de } [a,b]\}$ for limitado, diz-se que f é uma *função de variação limitada* e escreve-se $V_a^b(f) = \sup_P V(f;P)$. O número $V_a^b(f)$ chama-se a *variação total* de f no intervalo $[a,b]$. O significado intuitivo de $V_a^b(f)$ é o comprimento total do caminho percorrido por $f(t)$ quando t cresce de a até b. Prove:

1. Toda função lipschitziana é de variação limitada;
2. Toda função monótona é de variação limitada;
3. Se f e g são de variação limitada, o mesmo ocorre com $f+g$, $f \cdot g$ e $|f|$;
4. Seja f contínua de variação limitada. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow |V(f;P) - V_a^b(f)| < \varepsilon$;
5. Se f possui derivada contínua, então f é de variação limitada e $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$.

31. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f embora sendo contínua, não possui variação limitada. [*Sugestão*: use o fato de que as reduzidas da série $\sum \frac{1}{n}$ não formam um conjunto limitado.]

32. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partição P de $[a,b]$, indiquemos com (t'_{i-1}, t'_i) os intervalos de P nos quais $f(t'_{i-1}) \leq f(t'_i)$ com (t''_{i-1}, t''_i) os intervalos onde $f(t''_{i-1}) > f(t''_i)$. Escrevamos $V^+(f;P) = \Sigma[f(t'_i) - f(t'_{i-1})]$ e $V^-(f;P) = \Sigma[f(t''_{i-1}) - f(t''_i)]$, $V_a^b(f)^+ = \sup_P V^+(f;P)$ e $V_a^b(f)^- = \sup_P V^-(f;P)$. Estes números chamam-se a *variação positiva* e a *variação negativa* de f em $[a,b]$. Prove

    1. $V_a^b(f) = V_a^b(f)^+ + V_a^b(f)^-$;
    2. As funções $\varphi, \xi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = V_a^x(f)^+$ e $\xi(x) = V_a^x(f)^-$ são não-decrescentes;
    3. $f(x) - f(a) = V_a^x(f)^+ - V_a^x(f)^-$;
    4. Uma função é de variação limitada se, e somente se, é diferença entre duas funções monótonas;
    5. Toda função de variação limitada é integrável.

33. Seja $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \cdot \log x$.

34. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.

35. Prove que $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\log(x+1)} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}[\log x \cdot \log(x+1)] = 0$.

36. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$. Prove que $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$) ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

37. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$ para todo $a > 0$.

38. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}}\right]^n = e^e.$$

39. Se $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f\colon [a, b] \to [c, d]$ é integrável então $g \circ f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

40. Se $f\colon [a, b] \to [c, d]$ é de classe C^1, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, e $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $g \circ f$ é integrável.

41. Se $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho. Em particular, $\overline{X}$ tem interior vazio. E se X tem medida nula?

42. Seja $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ uma enumeração dos racionais. Para $n, i \in \mathbb{N}$ arbitrários, seja J_{ni} o intervalo aberto de centro r_i e comprimento $1/2^{n+i}$. Pondo $A_n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} J_{ni}$ e $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mostre que A tem medida nula e $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$ é uma decomposição da reta como reunião disjunta de um conjunto de medida nula com um conjunto "magro" (isto é, reunião enumerável de fechados com interior vazio).

43. O conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função integrável tem medida nula porque é reunião enumerável de conjuntos de conteúdo nulo. Caberia indagar se todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ de medida nula é dessa forma. Mostre que o conjunto A do Exercício 42 não é reunião enumerável de conjuntos de conteúdo nulo.

44. Dada uma seqüência de intervalos abertos I_n, contidos em $[0, 1]$, se $\Sigma|I_n| < 1$ então o conjunto fechado $F = [0, 1] - \cup I_n$ não tem medida nula.

45. Veja, na página 356 do volume 2, a construção de X, o "conjunto de Cantor com medida positiva". Defina um homeomorfismo $h: [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $h(X) = K$ (verdadeiro conjunto de Cantor). Em seguida considere $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, a função característica de K. Mostre que $g \circ h$ não é integrável, embora g seja integrável e h seja contínua.

Capítulo X

Seqüências e Séries de Funções

Tendo estudado, no Capítulo IV, seqüências e séries de números reais, consideraremos agora as seqüências e as séries cujos termos são funções. Certos problemas importantes na Matemática visam a determinar funções satisfazendo a certas condições dadas. (Por exemplo, problemas que se reduzem a um sistema de equações diferenciais.) Uma das maneiras de abordar tais problemas consiste em obter funções que satisfazem as condições apenas aproximadamente, com erro cada vez menor, e depois "passar ao limite". É de se esperar que a "função-limite" seja uma solução exata do problema. Isto nos dá uma primeira idéia sobre o interesse da noção de limite de uma seqüência de funções. Quando cada função da seqüência é obtida somando-se à anterior uma função conhecida, temos o importante caso particular de uma série de funções.

Ao contrário das seqüências de números reais, para as quais existe uma única noção de limite, há várias maneiras diferentes de definir a convergência de uma seqüência de funções. Estudaremos aqui a convergência simples e a convergência uniforme.

Depois de estabelecer as principais propriedades do limite uniforme, estudamos detalhadamente o importante caso particular das séries de potências. Como aplicação, apresentamos uma

exposição breve das funções trigonométricas. Em seguida, retomamos a noção de função analítica, abordada ligeiramente no Capítulo VIII, e a examinamos com mais profundidade. Outro tópico importante que apresentamos neste capítulo é a idéia de eqüicontinuidade. O Teorema de Ascoli-Arzelá é demonstrado.

1 Convergência simples e convergência uniforme

Seja X um conjunto de números reais. De acordo com as definições gerais, uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em X e tomando valores reais.

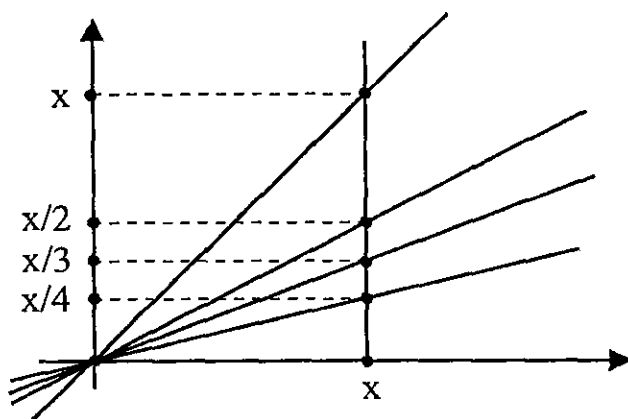
Diz-se que a seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge *simplesmente* para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência de números $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

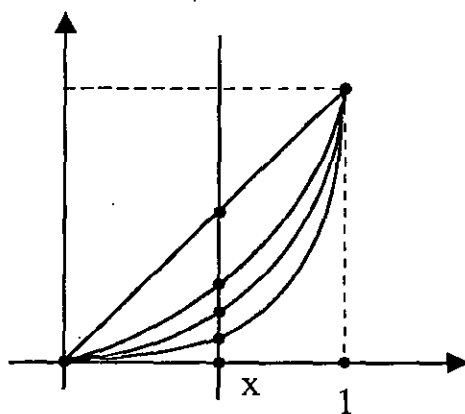
Para exprimir esta situação, diz-se que "f_n converge simplesmente para f em X". Ou, mais resumidamente: $f_n \to f$ simplesmente, em X.

A convergência simples às vezes também se chama convergência *ponto a ponto* ou convergência *pontual*.

Exemplos.

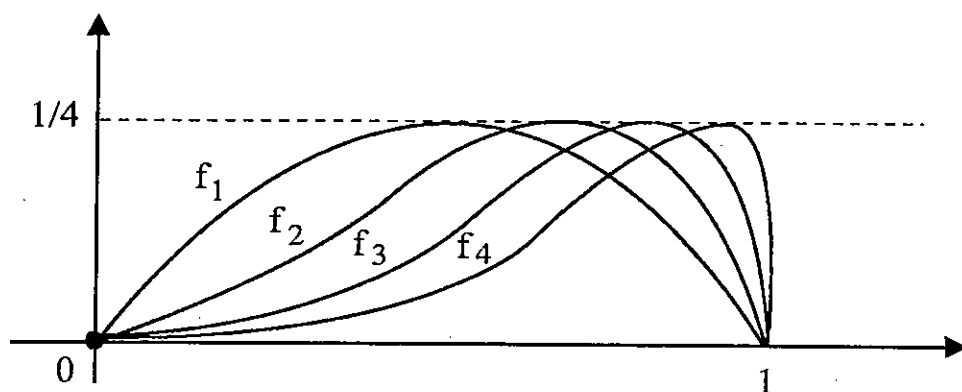
1. Dado o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, sejam (a_n) uma seqüência de números reais com $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função. Podemos considerar a seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$ e a função $f : X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a \cdot g(x)$. Para cada $x \in X$ temos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} [a_n \cdot g(x)] = a \cdot g(x) = f(x)$. Logo a seqüência de funções $f_n = a_n \cdot g$ converge simplesmente em X para a função $f = a \cdot g$. Como caso particular, vemos que a seqüência de funções $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ converge simplesmente,

em toda a reta, para zero (isto é, para a função identicamente nula $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Para cada $x \in \mathbb{R}$, a seqüência de números $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ converge a zero.

2. Seja a seqüência de funções $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Então (f_n) converge simplesmente para a função $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Com efeito, para cada $x \in [0,1)$ temos $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, enquanto $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

A figura mostra os gráficos das funções $f_n(x) = x^n$ no intervalo $[0,1]$. Qualquer reta vertical levantada de um ponto $x \in [0, a)$ corta esses gráficos numa seqüência de pontos cujas ordenadas convergem monotonamente para zero. No ponto $x = 1$, temos $f_n(1) = 1$ para todo n.

3. A seqüência de funções $f_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \cos(nx)$ não converge simplesmente para função alguma. Com efeito, tomando, por exemplo, $x = \pi$, temos $f_n(x) = (-1)^n$, logo não existe $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$.

Dizer que $f_n \to f$ simplesmente em X significa que, fixado arbitrariamente um ponto $x \in X$, os gráficos das funções f_n intersectam a vertical levantada pelo ponto $(x, 0)$ numa seqüência de pontos cujas ordenadas convergem para $f(x)$. Coletivamente, porém, os gráficos das f_n podem ser bem diferentes do gráfico de f e mesmo nunca se aproximarem dele. Veja o Exemplo 2 acima. Isto é ainda mais flagrante no Exemplo 4, a seguir.

Exemplo 4. A seqüência de funções $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente para a função identicamente nula em $[0, 1]$. Uma verificação imediata mostra que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor máximo de $f_n(x)$ é igual a $1/4$ e é atingido no ponto $x = \sqrt[n]{1/2}$. (Note que, quando $n \to \infty$, $\sqrt[n]{1/2}$ tende a 1.) Estes fatos nos permitem esboçar os gráficos das funções f_n. Como se vê, cada gráfico apresenta um calombo, cuja altura se mantém constante, igual a $1/4$, de modo que quando $n \to \infty$, a forma do gráfico de f_n não se aproxima da forma do gráfico da função limite. (Vide figura abaixo)

Examinemos a debilidade da convergência simples sob outro ângulo.

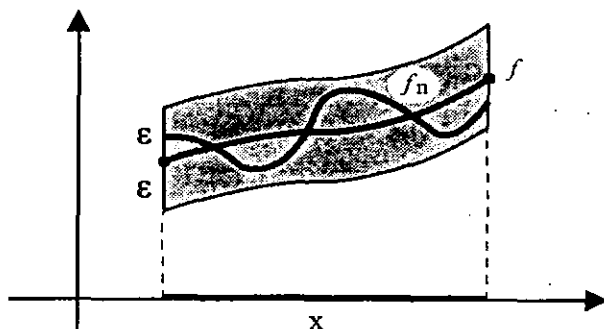
Dizer que a seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f: X \to \mathbb{R}$ significa, formalmente, o seguinte: dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$, um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e de x, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Mantendo ε fixo, pode perfeitamente ocorrer que não exista n_0 algum que sirva simultaneamente para todo $x \in X$.

Exemplo 5. Seja a seqüência de funções $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x^n$. Já vimos que (f_n) converge simplesmente para a função $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Fixemos $\varepsilon = 1/2$, por exemplo. Afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq 1/2$, ou seja $x^{n_0} \geq 1/2$. Basta observar que $\lim\limits_{x \to 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$.

Quando for possível, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, obter um n_0 que sirva para todos os pontos $x \in X$, diremos que $f_n \to f$ uniformemente em X. Em termos mais precisos:

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge *uniformemente* para uma função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, *seja qual for* $x \in X$.

Interpretemos esta definição geometricamente. Dada uma função $f: X \to \mathbb{R}$ chamaremos de *faixa de raio* ε (e amplitude 2ε) *em torno do gráfico de* f ao conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \varepsilon$ isto é, $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, sendo ε um número real positivo.

A condição "$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$" significa que o gráfico de f_n está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

Assim, dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X significa afirmar que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todas as funções f_n, com $n > n_0$, têm seus gráficos contidos na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

Evidentemente, se $f_n \to f$ uniformemente em X, então $f_n \to f$ simplesmente. A recíproca é falsa, como vimos no Exemplo 5.

Para provar que f_n não converge uniformemente para f em X devemos exibir um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se pode achar $n > n_0$ e $x \in X$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Exemplos.

6. Reexaminemos o Exemplo 1 quanto à convergência uniforme. A seqüência de números a_n converge para $a \in \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Então a seqüência de funções $f_n = a_n \cdot g\colon X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f = a \cdot g$ em X. No caso trivial em que, a partir de uma certa ordem n_0, todos os termos a_n são iguais a a, esta convergência é uniforme pois todas as funções f_n coincidirão com f para $n \geq n_0$. Se, porém, $a_n \neq a$ para uma infinidade de valores de n então $f_n \to f$ uniformemente em X se, e somente se, g for limitada. Com efeito, se tivermos $|g(x)| < K$ para todo $x \in X$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{K}$. Logo $n > n_0 \Rightarrow$ $|f_n(x) - f(x)| = |a_n - a||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$, para todo $x \in X$, o que prova a uniformidade da convergência. Reciprocamente, se g não é limitada em X, a convergência $a_n \cdot g \to a \cdot g$ não é uniforme. Com efeito, seja $\varepsilon = 1$. Mostraremos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, podemos achar $n > n_0$ e $x \in X$ tais que $|a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| \geq 1$. Ora, dado n_0, existe (em virtude da hipótese feita sobre os a_n) $n > n_0$ tal que $a_n \neq a$. Como g é ilimitada em X, podemos

encontrar $x \in X$ tal que $|g(x)| \geq \frac{1}{|a_n - a|}$. Para tais n e x temos

$$|a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| = |a_n - a| \cdot |g(x)| \geq |a_n - a| \cdot \frac{1}{|a_n - a|} = 1.$$

Caso particular: a seqüência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge uniformemente para (a função identicamente) zero num conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, X for limitado. Com efeito, neste caso, a função g é dada por $g(x) = x$, logo g é limitada em X se, e somente se, X é um conjunto limitado. (Examine os gráficos: quando X é ilimitado, uma faixa em torno da função nula definida em X não pode conter o gráfico de *nenhuma* restrição $f_n|X$, onde f_n é a reta $y = \frac{x}{n}$.)

7. Sabemos que a seqüência de funções $f_n(x) = x^n$ converge simplesmente em $[0, 1]$ para a função f tal que $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$. Mas já vimos (Exemplo 5) que f_n não converge uniformemente para f, nem mesmo no intervalo $[0, 1)$. Mostraremos agora que (f_n) converge uniformemente para f (função identicamente nula) em cada intervalo $[0, 1 - \delta]$ onde $0 < \delta < 1$. Com efeito, sendo $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \delta)^n = 0$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow (1 - \delta)^n < \varepsilon$. Então, para todo $x \in [0, 1 - \delta]$, temos $0 < x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon$, desde que $n > n_0$. Isto prova a afirmação feita.

8. A seqüência de funções $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente para (a função) zero no intervalo $[0, 1]$. Tal convergência não é uniforme porque para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x = \sqrt[n]{1/2}$ tal que $f_n(x) = \frac{1}{4}$. Mas, para todo $\delta > 0$, temos $f_n \to f$ uniformemente no intervalo $[0, 1 - \delta]$. Basta observar que $0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n$; como $x^n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1 - \delta]$, segue-se que $x^n(1 - x^n)$ goza da mesma propriedade.

Existe um critério para a convergência uniforme, análogo ao critério de Cauchy para seqüências de números reais (vide Teorema 13, Capítulo IV). Para enunciá-lo, introduzamos primeiro

uma definição.

Uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ chama-se uma *seqüência de Cauchy* quando, para qualquer $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 1. *Uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $f_n \to f$ uniformemente em X. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Então, se tomamos m e n ambos maiores do que n_0, vale a desigualdade acima e também $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Portanto, a hipótese $m, n > n_0$ implica $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $x \in X$. Logo (f_n) é uma seqüência de Cauchy. Reciprocamente, se a seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ é de Cauchy então, para cada $x \in X$, os números $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma seqüência de Cauchy de números reais. Pelo Teorema 13, Capítulo IV, esta seqüência converge para um número real que chamamos $f(x)$. Isto define uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Para mostrar que $f_n \to f$ uniformemente em X, seja dado $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Nesta desigualdade, mantenhamos n e x fixos e façamos $m \to \infty$. Obteremos: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$, desde que seja $n > n_0$. Isto prova que $f_n \to f$ uniformemente.

Corolário. *Se as funções $f_n \colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ (definidas no fecho de X) são contínuas e (f_n) converge uniformemente em X, então a seqüência (f_n) converge (uniformemente) em $\overline{X}$.*

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Como as funções f_n são contínuas em $\overline{X}$, segue-se daí que, $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(y) - f_n(y)| \leq \varepsilon$ para todo $y \in \overline{X}$ (já que todo $y \in \overline{X}$ é limite de uma seqüência

de pontos de X) e, portanto, (f_n) é uma seqüência de Cauchy – logo uniformemente convergente – em $\overline{X}$.

O Teorema 1 chama-se o *critério de Cauchy* para convergência uniforme. Note que o conjunto X poderia ter sido tomado arbitrariamente pois em parte alguma se faz uso do fato de que seus elementos são números reais.

Como conseqüência do critério de Cauchy, obteremos o teste de Weierstrass para convergência absoluta e uniforme de séries de funções. Falemos um pouco sobre estas.

A soma $f = \Sigma f_n$ de uma série é um caso particular de um limite de seqüência: $f = \lim_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. (Estamos admitindo tacitamente que f e todas as funções f_n são definidas no mesmo conjunto X.) Tem sentido, portanto, dizer que a série Σf_n converge simplesmente ou uniformemente no conjunto X.

Reciprocamente, todo limite $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ de uma seqüência de funções $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ também pode ser obtido como soma de uma série. Basta pôr $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, $f_3 = \varphi_3 - \varphi_2, \ldots$, tem-se, então, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \varphi_n$, de modo que $\varphi = \Sigma f_n$.

Por definição, a série Σf_n converge uniformemente num conjunto X se, e somente se, a seqüência de suas reduzidas $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ é uniformemente convergente em X. Assim, dizer que Σf_n converge uniformemente para f em X significa que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o "resto" $r_n(x)$, definido por $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) + r_n(x)$, cumpre a condição $|r_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$.

A todo conceito ou teorema sobre seqüências corresponde um análogo a propósito de séries.

Mas há certas noções relativas a séries que, quando traduzidas para seqüências, perdem o apelo intuitivo. Por exemplo, a noção de série absolutamente convergente corresponderia à de uma seqüência de funções $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_n |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < +\infty$ para todo $x \in X$, idéia pouco interessante.

Há também alguns tipos especiais de séries, como as séries de potências (que estudaremos logo mais), cujas propriedades não decorrem de teoremas gerais sobre seqüências. Daremos agora

um exemplo de propriedade de séries, a qual não possui análoga natural para seqüências.

Uma série de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *normalmente convergente* quando existe uma seqüência de constantes $a_n \geq 0$ tais que Σa_n converge e $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$.

Exemplo 9. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ é normalmente convergente pois as funções $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, satisfazem as relações $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, como sabemos, $\Sigma \dfrac{1}{n^2}$ é uma série convergente de números reais.

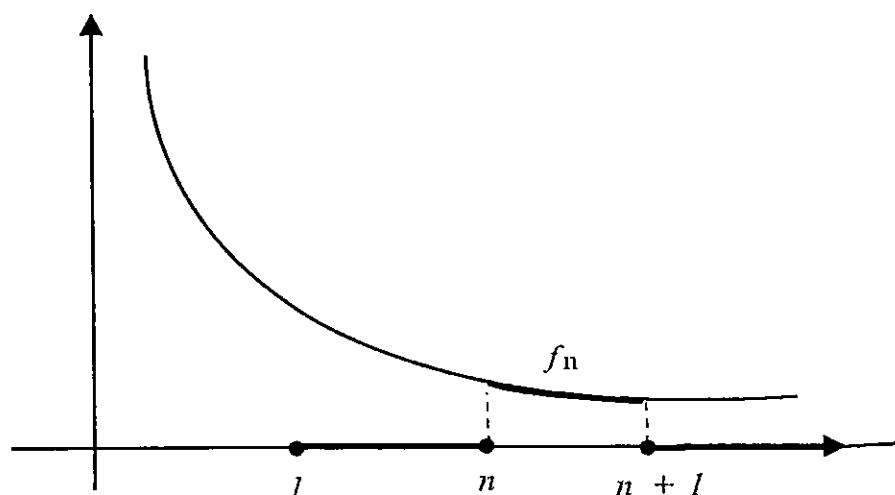
Teorema 2. (Teste de Weierstrass). *Se Σf_n é normalmente convergente então $\Sigma|f_n|$ e Σf_n são uniformemente convergentes.*

Demonstração. Seja X o domínio comum de todas as funções f_n. Para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários e todo $x \in X$, temos $|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$. Segue-se então do critério de Cauchy (Teorema 1) que $\Sigma|f_n|$ e Σf_n convergem uniformemente em X.

Exemplos.

10. A série $\sum\limits_{n} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, o mesmo ocorrendo com $\sum\limits_{n} \dfrac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2}$.

11. A convergência normal é condição suficiente, porém, não necessária para convergência uniforme. Consideremos a seqüência de funções $f_n\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definidas assim: $f_n(x) = 1/x$ se $x \in [n, n+1)$ e $f_n(x) = 0$ caso contrário. Temos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in [1, +\infty)$. Seja $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = 1/x$. A convergência $\sum_n f_n = f$ é uniforme em $[1, +\infty)$, pois $0 \leq f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_n(x)] < \frac{1}{n}$ para todo $x \in [1, +\infty)$.

Mas a série Σf_n não converge normalmente em $[1, +\infty)$. Com efeito, se as constantes a_n são tais que $f_n(x) \leq a_n$ para todo $x \in [0, +\infty)$, em particular, tomando $x = n$, obtemos $a_n \geq 1/n$ e, portanto, a série Σa_n não converge. Assim, Σf_n é uma série de funções não-negativas que converge uniformemente, porém não normalmente em $[1, +\infty)$.

2 Propriedades da convergência uniforme

Começaremos mostrando que a convergência uniforme nos permite inverter a ordem de limites repetidos. A fim de motivar o problema, vejamos um exemplo.

Exemplo 12. Seja $f_n(x) = x^n$. Sabemos que $f_n \to f$ simplesmente em $[0, 1]$, onde f é dada por $f(x) = 0$ para $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Assim, $\lim_{x \to 1}[\lim_{n \to \infty} f_n(x)] = \lim_{x \to 1} f(x) = 0$, enquanto $\lim_{n \to \infty}[\lim_{x \to 1} f_n(x)] = \lim_{n \to \infty}(1) = 1$. Portanto não se pode, neste

caso, inverter a ordem em que são tomados os limites. Temos $\lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to 1} f_n(x)] \neq \lim_{x\to 1}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]$.

Supondo convergência uniforme, temos o

Teorema 3. *Seja* a *um ponto de acumulação de* X. *Se a seqüência de funções* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $L_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, *então*

1.º) *Existe* $L = \lim_{n\to\infty} L_n$;

2.º) *Tem-se* $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Em outras palavras, vale $\lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to a} f_n(x)] = \lim_{x\to a}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]$, *desde que existam os dois limites dentro dos colchetes, sendo o segundo deles uniforme.*

Demonstração. Para mostrar que existe $L = \lim L_n$, basta provar que (L_n) é uma seqüência de Cauchy. Seja então dado $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$ (vide Teorema 1). Sejam $m, n > n_0$. Podemos obter $x \in X$ tal que $|L_m - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $|f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Com esta escolha de x, podemos escrever:

$$\begin{aligned}|L_m - L_n| &\leq |L_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| \\ &\quad + |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $m, n > n_0$ implica $|L_m - L_n| < \varepsilon$, isto é, (L_n) é uma seqüência de Cauchy, a cujo limite chamamos L. Mostremos, agora, que a função $f = \lim f_n$ tem limite L quando x tende para a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|L - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$. Fixemos um tal n maior do que n_0. Como $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Afirmamos que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Com efeito, para todo x

cumprindo estas condições, temos

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n|$$
$$+ |L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corolário. *Seja* a *um ponto de acumulação de* X. *Se a série* Σf_n *converge uniformemente para* f *em* X *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $L_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$, *então* ΣL_n *é uma série convergente e* $\sum_n L_n = \lim_{x \to a} f(x)$.

Em outras palavras, o teorema clássico para o limite de uma soma vale para séries:

$$\lim_{x \to a} [\sum_n f_n(x)] = \sum_n [\lim_{x \to a} f_n(x)],$$

desde que $\sum_n f_n$ *seja uniformemente convergente.*

Com efeito, pondo $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, a seqüência de funções $s_n \colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f em X e, para cada n, existe $\lim_{x \to a} s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to a} f_i(x)$. O Teorema 3 aplica-se imediatamente para produzir o resultado enunciado.

Observações: 1. O resultado acima vale ainda quando $a = +\infty$. Isto pressupõe, evidentemente, que X seja ilimitado superiormente. Neste caso, tem-se $\lim_{n \to \infty} [\lim_{x \to \infty} f_n(x)] = \lim_{x \to \infty} [\lim_{n \to \infty} f_n(x)]$ desde que existam os dois limites dentro dos colchetes, sendo o segundo deles uniforme. A demonstração é a mesma. No final, em vez de δ, tomar $A > 0$ tal que $x > A \Rightarrow |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2. Podemos tornar mais simétrico o enunciado do Teorema 3. Seja a um ponto de acumulação de X. Dada a seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, diremos que existe $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$ *uniformemente em relação a* n se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - L_n| < \varepsilon$, *seja qual for* $n \in \mathbb{N}$. (Em outras palavras, a escolha do δ depende somente

de ε e não de n.) O mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 3 (*mutatis mutandis*) permite provar que se, para todo n, existe $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, uniformemente em relação a n, e se $f_n \to f$ simplesmente em X, então existe $L = \lim L_n$ e, além disso, $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Agora podemos dizer: existem e são iguais os limites repetidos, desde que existam os limites dentro dos colchetes, sendo *um qualquer* deles uniforme.

3. Tal simetria não se estende para séries. Não é verdade que se a série $\Sigma f_n(x)$ converge para $f(x)$ em todo ponto $x \in X$ e se, para cada n, existe $L_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, uniformemente em relação a n, então ΣL_n converge e é igual a $\lim_{x\to a}[\sum_n f_n(x)]$. Em outras palavras, pode-se ter

$$\lim_{x\to a}\left[\sum_n f_n(x)\right] \neq \sum_n \left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right],$$

mesmo que existam todos estes limites, sendo apenas $\lim_{x\to a} f_n(x)$ uniforme em relação a n. Por exemplo, seja $X = [0,1]$. Ponha $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$ para $n \geq 2$ e $f_1(x) = x$. Então $\lim_{x\to 1} f_1(x) = 1$ e $\lim_{x\to 1} f_n(x) = 0$ se $n \geq 2$, uniformemente em relação a n. Além disso, $\sum_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$. Logo

$$\sum_n \left[\lim_{x\to 1} f_n(x)\right] = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1}\left[\sum_n f_n(x)\right] = 0.$$

Teorema 4. *Se $f_n \to f$ uniformemente em X e todas as f_n são contínuas num ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Isto é óbvio se a for um ponto isolado de X. Se, porém, a for um ponto de acumulação de X, o Teorema 3 nos permite escrever

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to a} f_n(x)] \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).\end{aligned}$$

Logo f é contínua no ponto a.

Corolário. *O limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas é uma função contínua.*

Vemos assim, *a posteriori*, que a convergência da seqüência de funções $f_n(x) = x^n$ no intervalo $[0, 1]$ não poderia ser uniforme, já que a função limite não é contínua. Observe-se que a continuidade de $f = \lim f_n$ não é, entretanto, suficiente para garantir que a convergência seja uniforme, já que as funções contínuas $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ convergem em $[0, 1]$ para a função contínua $f(x) \equiv 0$ mas a convergência não é uniforme. (Veja os Exemplos 5 e 8.) De qualquer maneira, a descontinuidade da função limite é sempre um modo prático e imediato de provar que uma seqüência de funções contínuas não converge uniformemente.

Há, porém, um caso em que a continuidade da função limite garante a uniformidade da convergência de uma seqüência de funções contínuas. É quando as funções estão definidas num compacto e a convergência é monótona.

Diremos que uma seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge *monotonamente* para a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência de números $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ é monótona e, além disso, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Teorema 5. (Dini.) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge monotonamente para uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $K_n = \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Como f_n e f são contínuas e X é fechado, segue-se que cada K_n é um subconjunto fechado de X e, portanto, cada K_n é compacto. A monotonicidade da seqüência (f_n) implica que $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \ldots$ Mas $\bigcap_n K_n = \emptyset$, pois $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicaria $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ para todo n, o que seria um absurdo, já que

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Sendo $\bigcap K_n = \emptyset$, concluímos (veja o Teorema 12, Capítulo V) que algum K_{n_0} é vazio. Portanto, $n > n_0 \Rightarrow K_n$ vazio, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

O Teorema 5 é falso no caso X não-compacto, pois a seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$ converge monotonamente para a função contínua 0 no intervalo não-compacto $[0, 1)$, mas a convergência não é uniforme. O mesmo se dá com as funções $g_n(x) = \frac{x}{n}$, que convergem monotonamente para zero na reta, sem que seja uniforme a convergência.

Corolário 1. *Uma série convergente de funções contínuas não-negativas num conjunto compacto é uniformemente convergente se, e somente se, a soma é uma função contínua no compacto.*

Com efeito, se $f_n \geq 0$ então as reduzidas $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ formam uma seqüência monótona.

Exemplo 13. A série de funções não-negativas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge para a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $f(x) = 1 + x^2$ se $x \neq 0$. (Soma de uma série geométrica.) A função f é descontínua no ponto 0. A convergência não é uniforme em compacto algum do qual 0 seja ponto de acumulação.

O corolário acima contém o seguinte fato, aparentemente mais geral:

Corolário 2. *Se as funções* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *são contínuas e, para todo* $x \in X$, $\sum_n |f_n(x)| = f(x)$, *onde* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é contínua, então a série* Σf_n *converge uniformemente em* X. *(Supondo ainda* X *compacto.)*

Com efeito, pelo Corolário 1, a série de funções $\Sigma|f_n|$ converge uniformemente em X. Como $|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$, segue-se do critério de Cauchy que Σf_n também converge uniformemente em X.

Examinemos agora as relações entre a convergência uniforme e as operações de integração e derivação. Note-se que integral e

derivada são tipos especiais de limites. Assim sendo, os teoremas abaixo afirmam que em certos casos é permitido inverter a ordem de um limite repetido.

Teorema 6. *Se uma seqüência de funções integráveis* $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *então* f *é integrável e vale* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Em resumo: $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$, *desde que* $\lim f_n$ *seja uniforme.*

Demonstração. Sejam D_n e D os conjuntos dos pontos de descontinuidade de f_n e f respectivamente. Pelo Teorema 4, se $x \notin D_n$ para todo n então $x \notin D$. Logo $D \subset \cup D_n$. Como cada D_n tem medida nula, segue-se que D tem medida nula e portanto f é integrável. (Veja o Teorema 20, Capítulo IX.) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$. Portanto

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Logo $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Corolário. *Seja* Σf_n *uma série uniformemente convergente de funções integráveis* $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Sua soma é integrável e tem-se* $\int_a^b \sum_n f_n = \sum_n \int_a^b f_n$. *Em outras palavras: é permitido integrar termo a termo uma série uniformemente convergente.*

Exemplos.

14. Sabe-se do Cálculo que, para todo x real, $\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$. Em virtude do Teste de Weierstrass, a série geométrica

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \ldots$$

é uniformemente convergente em todo intervalo fechado contido no intervalo aberto $(-1, 1)$. [Note que ela converge em $(-1, 1)$ mas não uniformemente, devido ao Corolário do Teorema 1, pois diverge nos pontos -1 e 1.] Assim, podemos integrá-la termo a termo e obter, sempre que $|x| < 1$:

$$\text{arc tg } x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Isto nos fornece o desenvolvimento de arc tg x em série de Taylor no intervalo $(-1, 1)$. Mas a série $\Sigma(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge para $x = 1$ e $x = -1$, o que nos leva a pensar que o desenvolvimento acima deve ser válido em todo o intervalo fechado $[-1, 1]$. Tal conclusão é correta e será justificada pelo Teorema de Abel, que demonstraremos mais adiante. Uma justificação mais elementar pode ser dada com base na igualdade

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

que, integrada no intervalo de extremos 0 e x, com $|x| \leq 1$, fornece:

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt$.

Para $|x| \leq 1$, obtemos então:

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$$

e, portanto, $|x| \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, o que nos dá

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

para todo $x \in [-1, 1]$. Em particular, tomando $x = 1$, obtemos a curiosa fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

15. Se uma seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para uma função f em $[a, b]$, pode ocorrer que f não seja integrável. Obtém-se um exemplo enumerando-se os números racionais $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ contidos em $[a, b]$, definindo $f_n(x) = 1$ se $x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, e $f_n(x) = 0$, caso contrário. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ a função tal que $f(x) = 1$ se x é racional $f(x) = 0$ se x é irracional. Então $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Cada f_n é integrável pois tem apenas n pontos de descontinuidade, mas f não é integrável pois é descontínua em todos os pontos do intervalo $[a, b]$.

16. Quando se tem $f_n \to f$ simplesmente em $[a, b]$, mesmo que f e cada f_n sejam integráveis, pode ocorrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$. Por exemplo, definamos $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$ pondo $f_n(x) = (n + 1)x^n$ se $0 \leq x < 1$ e $f_n(1) = 0$. Então $f_n \to f$ simplesmente em $[0, 1]$, onde f é a função identicamente nula. ($\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0$ quando $0 \leq x < 1$, porque $(n + 1)x^n$ é o termo geral de uma série que converge pelo teste da razão.) Ora, $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ para todo n, enquanto $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$. Informamos ao leitor interessado que, se $f_n \to f$ simplesmente no intervalo $[a, b]$, se f e cada f_n são integráveis, então vale $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$ desde que exista uma constante $k > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$.

A derivação termo a termo requer outros cuidados. Não basta que a seqüência dada convirja uniformemente. Por exemplo, a seqüência de funções $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ converge uniformemente para zero em toda a reta. Mas a seqüência de suas derivadas $f_n'(x) = \cos(nx)$ não converge (sequer simplesmente) em intervalo algum. Para derivar termo a termo, é preciso supor a con-

vergência uniforme das derivadas. Em compensação, basta admitir que a seqüência (f_n) convirja num único ponto do intervalo de definição.

Teorema 7. *Seja (f_n) uma seqüência de funções deriváveis no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a seqüência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g, então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função derivável f, tal que $f' = g$.*

Em resumo, $D(\lim f_n) = \lim Df_n$, desde que as derivadas Df_n convirjam uniformemente.

Primeira Demonstração. Consideraremos inicialmente o caso em que as funções f'_n são contínuas. Esta é a situação mais freqüente na prática. O Teorema Fundamental do Cálculo nos dá, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$:

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t)\, dt.$$

As duas parcelas do segundo membro convergem. Logo existe, para cada $x \in [a, b]$, o limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e o Teorema 6 nos fornece ainda, por passagem ao limite nessa igualdade:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\, dt.$$

Portanto, $f'(x) = g(x)$. Para verificar a uniformidade da convergência $f_n \to f$, basta observar que, subtraindo as duas igualdades acima, vem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + |x - c| \cdot \sup_{a \leq t \leq b} |f'_n(t) - g(t)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

para todo $t \in [a, b]$. Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

Segunda Demonstração (caso geral). O Teorema do Valor Médio aplicado à função $f_m - f_n$ diz que, para todo $x \in [a, b]$, existe d entre c e x tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x - c)[f'_m(d) - f'_n(d)].$$

A convergência uniforme de (f'_n) implica então que a seqüência (f_n) cumpre o critério de Cauchy e, portanto, converge uniformemente no intervalo $[a, b]$ para uma função f. A igualdade acima, com x_0 em vez de c, pode ser escrita assim:

$$(*) \qquad \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_m(d) - f'_n(d),$$

d entre x e x_0, para todo $x \neq x_0$. Fixado um ponto arbitrário $x_0 \in [a, b]$, formemos os quocientes de Newton $q_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ e $q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$. A igualdade $(*)$ mostra que a seqüência (q_n) cumpre o critério de Cauchy e por conseguinte $q_n \to q$ uniformemente em $[a, b] - \{x_0\}$. Ora, $\lim_{x \to x_0} q_n(x) = f'_n(x_0)$. Pelo Teorema 3, existem e são iguais os limites repetidos:

$$\lim_{x \to x_0} [\lim_{n \to \infty} q_n(x)] = \lim_{n \to \infty} [\lim_{x \to x_0} q_n(x)].$$

Ou seja, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$. Como x_0 é um ponto arbitrário de $[a, b]$, vemos que f é derivável em $[a, b]$, com $f' = g$.

Corolário 1. *Seja Σf_n uma série de funções deriváveis no intervalo $[a, b]$. Se $\Sigma f_n(c)$ converge para um certo $c \in [a, b]$ e a série $\Sigma f'_n = g$ converge uniformemente em $[a, b]$, então $\Sigma f_n = f$ converge uniformemente em $[a, b]$ e f é derivável, com $f' = g$.*

Corolário 2. *Uma seqüência (ou uma série) de funções deriváveis num intervalo arbitrário* I *pode ser derivada termo a termo desde que convirja num ponto* $c \in I$ *e a seqüência (ou série) das derivadas convirja uniformemente em cada subintervalo compacto de* I.

Séries duplas. Não desenvolveremos a teoria das séries duplas. Mostraremos apenas como se podem usar teoremas sobre séries de funções para provar igualdades do tipo $\sum_n(\sum_k x_{nk}) = \sum_k(\sum_n x_{nk})$.

Uma *seqüência dupla* (x_{nk}) é uma função $x\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada par (n, k) de números naturais um número real x_{nk}. Podemos imaginar os números x_{nk} dispostos num retângulo, que se estende indefinidamente para a direita e para baixo, de modo que o índice n em x_{nk} indica a n-ésima linha e o índice k significa a k-ésima coluna:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Para cada n, $\sum_n x_{nk}$ é a série obtida somando os termos da n-ésima linha. Fixado k, $\sum_n x_{nk}$ é a soma dos termos da k-ésima coluna. Evidentemente, tais séries podem convergir ou não. Supondo que todas estas séries convirjam, tentemos as somas repetidas $\sum_n(\sum_k x_{nk})$ e $\sum_k(\sum_n x_{nk})$. Mesmo quando convergem, elas podem dar diferentes resultados. Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\sum_n(\sum_k x_{nk}) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\sum_k(\sum_n x_{nk}) =$

$\sum_k (1/2)^k = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \to 0 \\
0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & \to 0 \\
0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots & \to 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots & \to 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

Lema. *Se, para cada* n, *a série* $\sum_k x_{nk}$ *for convergente e se, definindo as funções* $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *por* $f_n(k) = x_{n1} + \cdots + x_{nk}$, *a série* $\sum_n f_n$ *convergir uniformemente em* $\mathbb{N}$, *então são convergentes e iguais as somas repetidas*:

$$\sum_n \left(\sum_k x_{nk} \right) = \sum_k \left(\sum_n x_{nk} \right).$$

Demonstração. São convergentes a série $\Sigma f_n(1) = \sum_n x_{n1}$ e, para cada $k > 1$, a série $\sum_n [f_n(k) - f_n(k-1)] = \sum_n x_{nk}$. Pelo corolário do Teorema 3 (e a Observação 1 naquele local), tem-se $\sum_n [\lim_{k\to\infty} f_n(k)] = \lim_{k\to\infty} [\sum_n f_n(k)]$. Isto prova o lema.

Teorema 8. *Dada a seqüência dupla* (x_{nk}), *suponhamos que cada linha determine uma série absolutamente convergente, isto é,* $\sum_k |x_{nk}| = a_n$ *para cada* n. *Admitamos ainda que* $\sum_n a_n < +\infty$. *Então* $\sum_n(\sum_k x_{nk}) = \sum_k(\sum_n x_{nk})$. *Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.*

Demonstração. Pondo $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leq a_n$ para todo k e todo n. Logo Σf_n é normalmente convergente e, portanto, uniformemente convergente em $\mathbb{N}$. (Teste de Weierstrass.) O lema anterior nos dá então a conclusão desejada.

3 Séries de potências

As séries de funções mais importantes da Análise são as do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

que são chamadas *séries de potências*. Já vimos exemplos de série de potências no Capítulo VIII, quando estudamos as séries de Taylor.

Por simplicidade de notação, consideraremos quase sempre o caso $x_0 = 0$, ou seja, as séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \ldots.$$

O caso geral se reduz a este pela mudança de variável $y = x - x_0$. O leitor não terá dificuldade em adaptar para as séries $\Sigma a_n(x - x_0)^n$ os resultados que obtivermos para $\Sigma a_n x^n$.

A primeira pergunta a respeito de uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ é: para quais valores de x ela converge?

Exemplo 17. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo valor real de x e sua soma, como sabemos, é igual a e^x. Por outro lado, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge apenas para $x = 0$. De fato, se $x \neq 0$, a razão de $(n+1)!x^{n+1}$ para $n!x^n$ é igual a $(n+1)x$ e tem limite infinito quando $n \to \infty$. Já a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para $\frac{1}{1-x}$ se $x \in (-1, 1)$ e diverge fora deste intervalo. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ converge para $\log(1+x)$ quando $x \in (-1, 1]$ e diverge se x não pertence a este intervalo. Finalmente, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ converge para a soma arc tg x quando $x \in [-1, 1]$ e diverge quando x não pertence a este intervalo.

Mostraremos a seguir que o conjunto dos pontos x, tais que a série $\Sigma a_n x^n$ converge, é um intervalo de centro 0. (Se fosse uma série do tipo $\Sigma a_n(x - x_0)^n$ teríamos um intervalo de centro x_0.) Tal intervalo pode ser aberto, fechado, semi-aberto, reduzido ao ponto 0, ou igual à reta inteira, como nos vários casos do Exemplo 17 acima.

Vejamos então em que pontos x uma série de potências $\Sigma a_n x^n$ converge. O teste da raiz (Corolário 3, pág. 140) é o instrumento adequado para esta análise.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, consideremos a seqüência de números reais não-negativos $(\sqrt[n]{|a_n|})$. Temos as seguintes possibilidades:

1. Se a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada, a série $\Sigma a_n x^n$ converge apenas para $x = 0$. Com efeito, para todo $x \neq 0$, a seqüência $(|x| \sqrt[n]{|a_n|})$ será ilimitada e, portanto, o termo geral $|a_n x^n| = (|x| \sqrt[n]{|a_n|})^n$ não tenderá para zero. Exemplo, $\Sigma n^n x^n$.

2. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, então a série $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, logo $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Exemplo: $\sum \frac{1}{n^n} x^n$.

Os dois casos acima significam, respectivamente, que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ e $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. A possibilidade restante é, portanto,

3. Se $0 < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, isto é, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$, com $r > 0$, então $\Sigma a_n x$ converge absolutamente quando $x \in (-r, r)$ e diverge se $|x| > r$. (Nenhuma afirmação geral pode ser feita para $x = \pm r$.) Com efeito, $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}$. Pelo teste da raiz, $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente quando $\frac{|x|}{r} < 1$, isto é, quando $x \in (-r, r)$. Se, porém, $|x| > r$ então $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{r} > 1$ e por conseguinte $|a_n x^n| > 1$ para uma infinidade de valores de n. Assim sendo, $\Sigma a_n x^n$ não converge.

Exemplo 18. Quando $|x| = r$, isto é, $x = \pm r$, a série $\Sigma a_n x^n$ pode convergir ou não, conforme o caso. As séries $\frac{1}{1-x} = \Sigma x^n$, $\log(1+x) = \Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ e $\operatorname{arc\,tg} x = \Sigma \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ dão $r = 1$. Na primeira, $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ para todo n. Na segunda, existe $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ e na terceira, como $a_n = 0$ para n par e $a_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}$ para n ímpar, não existe $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ mas evidentemente o lim sup vale 1. A série Σx^n diverge em ambos os extremos do intervalo $(-1, 1)$. A série de $\log(1+x)$ converge no extremo $x = 1$ mas diverge no extremo $x = -1$ (dá a série harmônica, divergente como era de se esperar, já que $\log 0$ não existe). Finalmente, a série de arc tg x converge para $x = 1$ e para $x = -1$.

O número $r = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ chama-se o *raio de convergência* da série de potências $\Sigma a_n x^n$. Evidentemente, estamos convencionando pôr $r = 0$ quando o denominador acima for infinito e $r = \infty$ quando o denominador for zero.

Quando $r > 0$, o intervalo aberto $(-r, r)$ chama-se o *intervalo de convergência* da série $\Sigma a_n x^n$. Ao usar esta terminologia, deve-se lembrar que talvez a série convirja nos pontos r ou $-r$, situados fora do intervalo de convergência.

Em resumo, temos o

Teorema 9. *Uma série de potências $\Sigma a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe um número $r > 0$ (podendo ser $r = +\infty$) tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir, conforme o caso. Tem-se $\dfrac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.*

Teorema 10. *Uma série de potências converge uniformemente em todo intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência.*

Demonstração. Seja $(-r, r)$ o intervalo de convergência da série $\Sigma a_n x^n$. Basta provar que a convergência é uniforme em qualquer intervalo compacto do tipo $[-s, s]$, com $0 < s < r$. Ora, a série $\Sigma a_n s^n$ é absolutamente convergente. Como, para todo $x \in [-s, s]$, vale

$$|a_n x^n| \leq |a_n| s^n,$$

segue-se do Teste de Weierstrass (Teorema 2) que a série $\Sigma a_n x^n$ é uniformemente convergente no intervalo $[-s, s]$.

Corolário. *A função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \Sigma a_n x^n$, é contínua no intervalo de convergência $(-r, r)$.*

Exemplo 19. A série de potências $\Sigma a_n x^n$ pode não convergir uniformemente em todo o seu intervalo de convergência $(-r, r)$. Com efeito, quando uma série de funções contínuas converge

uniformemente num conjunto, ela também converge (uniformemente) no fecho do conjunto. (Corolário do Teorema 1.) Assim, por exemplo, a série Σx^n não converge uniformemente no intervalo $(-1,+1)$ porque isto obrigaria que ela convergisse nos pontos -1 e $+1$, o que não ocorre. O Teorema 10 garante apenas que Σx^n converge uniformemente em todo intervalo $[a,b]$ com $-1 < a < b < 1$. Analogamente, a série $\Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$ não converge uniformemente no seu intervalo de convergência $(-1,1)$, pois é divergente para $x=-1$ (embora convirja no ponto $x=1$).

Cabe então perguntar o seguinte: suponhamos que a série de potências $\Sigma a_n x^n$ convirja em ambos os extremos, r e $-r$, do seu intervalo de convergência $(-r,r)$. Podemos garantir que a convergência seja uniforme em $[-r,r]$? A resposta (afirmativa) é dada pelo

Teorema 11. (Abel.) *Seja* $\Sigma a_n x^n$ *uma série de potências cujo raio de convergência* r *é finito e positivo. Se* $\Sigma a_n r^n$ *converge, então* $\Sigma a_n x^n$ *converge uniformemente no intervalo* $[0,r]$. *Em particular,* $\lim_{x\to r^-}(\Sigma a_n x^n) = \Sigma a_n r^n$.

A demonstração se baseia no lema abaixo. (Veja o Teorema 21, Capítulo IV.)

Lema. *Seja* $\Sigma \alpha_p$ *uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas* $s_p = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ *são limitadas, isto é, existe* $K > 0$, *tal que* $|s_p| \leq K$ *para todo* $p \in \mathbb{N}$. *Seja* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_p \geq \ldots$ *uma seqüência não-crescente de números* $b_p \geq 0$. *Então, para todo* $p \in \mathbb{N}$ *vale* $|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq K \cdot b_1$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \\
&= |s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_p - s_{p-1}) b_p| \\
&= |s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + s_p b_p| \\
&\leq K(b_1 - b_2 + \cdots + b_{p-1} - b_p + b_p) = K b_1.
\end{aligned}
$$

Demonstração do Teorema de Abel. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}r^{n+1} + \cdots + a_{n+p}r^{n+p}| < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Dado $n > n_0$, escrevamos $\alpha_p = a_{n+p}r^{n+p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Estes α_p cumprem a hipótese do lema, com $K = \varepsilon$. Para todo $x \in [0, r]$, temos

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| = \left|\alpha_1\left(\frac{x}{r}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{x}{r}\right)^p\right| \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

Usando o lema, com $b_p = \left(\frac{x}{r}\right)^p$, concluímos que, para todo $n > n_0$ e todo $x \in [0, r]$, vale

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq \varepsilon\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} \leq \varepsilon,$$

seja qual for $p \in \mathbb{N}$. Isto prova que $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, r]$. Como cada termo $a_n x^n$ é uma função contínua, a soma $f(x) = \Sigma a_n x^n$ é contínua em $[0, r]$. Logo $\Sigma a_n r^n = f(r) = \lim_{x \to r^-} f(x) = \lim_{x \to r^-} (\Sigma a_n x^n)$.

Observações: 1. As mesmas conclusões do Teorema de Abel valem com $-r$ em lugar de r. Basta tomar a série $\Sigma(-1)^n a_n x^n$.

2. A série $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente no seu intervalo de convergência $(-r, r)$ se, e somente se, converge nos pontos r e $-r$.

3. A série $\Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformemente em cada intervalo $[-1 + \delta, 1]$, $\delta > 0$ mas não converge uniformemente em $(-1, 1]$.

Teorema 12. (Integração termo a termo.) *Se a série de potências $\Sigma a_n x^n$ converge em todos os pontos do intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ então*

$$\int_\alpha^\beta (\Sigma a_n x^n)\, dx = \Sigma \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração. Nestas condições, se $(-r, r)$ é o intervalo de convergência da série, temos $[\alpha, \beta] \subset [-r, r]$. Logo, pelo Teorema de Abel, a convergência de $\Sigma a_n x^n$ em $[\alpha, \beta]$ é uniforme. Podemos então usar o Teorema 6.

Observação. A integral de Riemann estudada no Capítulo IX se refere apenas a funções limitadas num intervalo $[a, b]$. Se $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ é tal que, para cada $c \in [a, b)$, f é (limitada e) integrável em $[a, c]$, então define-se a *integral imprópria* $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$, caso este limite exista. Por exemplo, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c (1-c)^{-1/2}\, dx = \lim_{c \to 1^-} [2 - 2(1-c)^{1/2}] = 2$. Por outro lado, $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to 1^-} [-\log(1-c)]$ não existe.

Feito este comentário preliminar, registremos que *se a série* $\Sigma a_n x^n$ *não convergir no extremo* r *do seu intervalo de convergência, mesmo assim podemos efetuar termo a termo a integral (imprópria)* $\int_0^r (\Sigma a_n x^n)\, dx$, *desde que a série* $\Sigma \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ *seja convergente*. Com efeito, o Teorema 12 nos permite integrar termo a termo entre 0 e t, se $t \in [0, r)$. Logo

$$\int_0^r (\Sigma a_n x^n)\, dx = \lim_{t \to r^-} \int_0^t (\Sigma a_n x^n)\, dx = \lim_{t\to r^-} \Sigma \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \text{(Abel)}$$
$$= \Sigma \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

Assim, por exemplo, a função $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ é contínua no intervalo $[0, 1)$ mas a série de potências que a define (com raio de convergência igual a 1) não converge no ponto $x = 1$. Entretanto podemos integrar termo a termo e obter $\int_0^1 f(x)\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 2$. (Veja Exemplo 26, Capítulo IV.) A justificativa está no fato de que a série das integrais é convergente.

Teorema 13. (Derivação termo a termo.) *A função* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *definida por uma série de potências, é derivável em cada ponto* x *do seu intervalo de convergência* $(-r, r)$. *Tem-se* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ *e a série de potências da derivada também tem raio de convergência* r.

Demonstração. Sabemos (Corolário do Teorema 7) que se pode derivar termo a termo uma série convergente, desde que a série das derivadas convirja uniformemente. Sabemos também (Teorema 10) que uma série de potências converge uniformemente em todo intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência. Portanto, basta verificar que os intervalos de convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ coincidem. Ora, a segunda destas séries converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ converge. Assim o raio de convergência da série das derivadas é o mesmo da série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$, que é o inverso do número $\limsup \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, pois $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ tem o mesmo raio de convergência que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Corolário. *A função* $f(x) = \Sigma a_n x^n$, *definida por uma série de potências, possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo. Assim, para* $x \in (-r, r)$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *arbitrários, tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n \cdot x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, *de modo que a série de potências*

que converge para $f(x)$ *em* $(-r, r)$ *é a série de Taylor de* f *em torno de* 0.

Exemplos.

20. *Funções trigonométricas.* A derivabilidade termo a termo das séries de potências fornece a base para uma construção rigorosa das funções trigonométricas, sem apelo à intuição geométrica. Faremos agora uma sucinta apresentação das funções seno e coseno. As séries abaixo têm ambas raio de convergência infinito, logo definem funções C^∞ na reta. Poremos, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Temos imediatamente $c(0) = 1$, $s(0) = 0$, $c(-x) = c(x)$, $s(-x) = -s(x)$ e, derivando termo a termo: $s'(x) = c(x)$ e $c'(x) = -s(x)$. Daí resulta que $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$ para todo x. Com efeito, a função $f(x) = s(x)^2 + c(x)^2$ tem derivada igual a $2s \cdot s' + 2c \cdot c' = 2s \cdot c - 2c \cdot s = 0$. Como $f(0) = 1$, vem $f(x) = 1$ para todo x. De maneira análoga se provam as fórmulas de adição:

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x) \cdot c(y) + c(x) \cdot s(y) \\ c(x+y) = c(x) \cdot c(y) - s(x) \cdot s(y). \end{cases}$$

Basta considerar y fixo e definir as funções $f(x) = s(x+y) - s(x) \cdot c(y) - c(x) \cdot s(y)$ e $g(x) = c(x+y) - c(x) \cdot c(y) + s(x) \cdot s(y)$. Tem-se $f' = g$ e $g' = -f$. Daí resulta que $(f^2 + g^2)' \equiv 0$. Como $f(0) = g(0) = 0$, concluímos que $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$ para todo x, o que dá $f(x) = g(x) = 0$ para todo x. Valem, portanto, as fórmulas de adição. Afirmamos agora que deve existir algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Do contrário, como $c(0) = 1$, seria $c(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, portanto, $s(x)$ seria uma função crescente de $x > 0$. Daí, para qualquer $x > 1$:

$$s(1) \cdot (x-1) \le \int_1^x s(t)\, dt = c(1) - c(x) \le 2.$$

(Como $s^2+c^2 = 1$, $c(x)$ varia entre -1 e $+1$, logo $c(1)-c(x) \leq 2$ para todo x.) Mas a desigualdade $s(1) \cdot (x-1) \leq 2$, válida para todo $x > 1$, é absurda. Logo $c(x)$ deve anular-se para algum $x > 0$. O conjunto dos números $x > 0$ tais que $c(x) = 0$ é fechado, já que c é contínua e $c(0) > 0$. Portanto, existe um menor número positivo para o qual c se anula. Chamamos tal número $\frac{\pi}{2}$.

A segunda fórmula de adição dá: $c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1$. Logo $c(\pi) = -1$, $c(2\pi) = 1$ e, portanto, $s(2\pi) = 0$. As fórmulas de adição, novamente usadas, mostram que $s(x + 2\pi) = s(x)$ e $c(x + 2\pi) = c(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, as funções $s(x)$ e $c(x)$ são periódicas, com período 2π.

Paramos aqui. O que fizemos parece-nos suficiente para indicar ao leitor como se pode desenvolver de modo puramente analítico a teoria das funções trigonométricas. Voltemos às séries de potências.

21. Embora as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ tenham o mesmo intervalo de convergência $(-r, r)$, pode ocorrer que a primeira delas convirja num dos pontos $\pm r$ e a segunda seja divergente neste ponto. Por exemplo $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge em $[-1, 1]$ mas a série derivada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$, diverge no ponto $x = 1$. Por outro lado, se a série derivada converge num dos extremos do intervalo de convergência, então a série primitiva também converge nesse extremo. (Por quê?)

Passemos às operações aritméticas com séries de potências. Evidentemente, se $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ convergem no intervalo $(-r, r)$, sua soma também converge naquele intervalo.

Suponhamos agora, mais precisamente, que r e s sejam respectivamente os raios de convergência de $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$. Quando $r < s$, o raio de convergência de $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ é r. Com efeito, esta série converge para todo $x \in (-r, r)$ e, se tomarmos $r < t < s$ então $\Sigma a_n t^n$ diverge, enquanto $\Sigma b_n t^n$ converge, logo

$\Sigma(a_n + b_n)t^n$ diverge.

Por outro lado, se $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ têm o mesmo raio de convergência r, então a soma $\Sigma(a_n + b_n)x^n$ pode ter qualquer número $\geq r$ como raio de convergência. Por exemplo, se os raios de $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ são respectivamente r e s, com $r < s$, então as séries $\Sigma - a_n x^n$ e $\Sigma(a_n + b_n)x^n$ têm ambas raio de convergência r mas sua soma $\Sigma b_n x^n$, tem raio s.

E o produto? Temos o

Teorema 14. *Se as séries de potências $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ convergem para todo $x \in (-r, r)$ então, pondo $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, para cada x nesse intervalo a série $\Sigma c_n x^n$ é convergente e $\Sigma c_n x^n = (\Sigma a_n x^n)(\Sigma b_n x^n)$.*

Demonstração. O intervalo $(-r, r)$ está contido no intervalo de convergência de cada uma das séries dadas. Logo $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ convergem absolutamente, para cada $x \in (-r, r)$. O enunciado segue-se do Teorema 24 do Capítulo IV.

Como aplicação deste teorema e do Teorema de Abel, mostraremos agora que a multiplicação de séries pode ser efetuada sem admitir convergência absoluta, desde que o resultado seja uma série convergente. Isto estende o Teorema 24 do Capítulo IV.

Corolário. *Dadas as séries convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, seja, para cada n, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ também for convergente, vale $\Sigma c_n = (\Sigma a_n) \cdot (\Sigma b_n)$.*

Com efeito, pelo Teorema de Abel, as funções $f(x) = \Sigma a_n x^n$ e $g(x) = \Sigma b_n x^n$ são definidas e contínuas (pelo menos) para $x \in (-1, 1]$. O Teorema 14 nos dá, para todo $x \in (-1, 1)$, $f(x) \cdot g(x) = \Sigma c_n x^n$. Novamente o Teorema de Abel implica:

$$(\Sigma a_n)(\Sigma b_n) = \lim_{x \to 1} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to 1} \Sigma c_n x^n = \Sigma c_n.$$

Se $\Sigma b_n x^n$ não é identicamente nula, tem raio de convergência s e $\Sigma a_n x^n$ tem raio de convergência r, com $r < s$, então a série

produto $\Sigma c_n x^n = (\Sigma a_n x^n)(\Sigma b_n x^n)$ tem raio de convergência $\geq r$. Mesmo se as séries dadas têm o mesmo raio de convergência, a série produto pode ter raio maior. Por exemplo $\frac{1-x}{1+x^2} = (1-x)\cdot\Sigma(-1)^n x^{2n}$ e $\frac{1+x^2}{1-x} = (1+x^2)\cdot\Sigma x^n$ têm ambas raio de convergência 1. Mas o produto destas duas séries tem, evidentemente, raio de convergência infinito.

Acabamos de ver que a soma e o produto de duas séries de potências ainda é uma série de potências. Ou, mais precisamente, se $f(x) = \Sigma a_n x^n$ e $g(x) = \Sigma b_n x^n$ para todo $x \in (-r, r)$ então os valores das funções $f+g$ e $f \cdot g$ no intervalo $(-r, r)$ ainda são dados por séries de potências: $f(x)+g(x) = \Sigma(a_n+b_n)x^n$ e $f(x)\cdot g(x) = \Sigma c_n x^n$, $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$.

E o inverso de uma série de potências?

Mostraremos agora que se $f(x) = \Sigma a_n x^n$ para todo $x \in (-r, r)$ e $f(0) = a_0 \neq 0$, então, num intervalo $(-s, s)$ possivelmente menor, a função $\frac{1}{f(x)}$ é representada por uma série de potências, isto é, tem-se $\frac{1}{f(x)} = \Sigma b_n x^n$ para todo $x \in (-s, s)$.

Aqui notam-se duas diferenças: a primeira é que o intervalo de convergência pode diminuir quando passamos de f a $1/f$. Isto é irremediável devido aos possíveis zeros de f em $(-r, r)$. Por exemplo, $f(x) = 1 - x$ é uma "série de potências" convergente em toda reta, mas $\frac{1}{f(x)} = 1 + x + x^2 + \ldots$ converge apenas no intervalo $(-1, 1)$, o que é de se esperar, já que $\frac{1}{1-x}$ não tem sentido para $x = 1$. Às vezes a limitação do intervalo de convergência vem de surpresa, como no caso de $f(x) = 1 + x^2$. Novamente $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ converge apenas no intervalo $(-1, 1)$ mas agora não podemos explicar esta restrição da mesma maneira, pois o denominador $1 + x^2$ nunca se anula. (Bem, nunca se anula para x real. Mas se olharmos para a função de variável complexa $1 + z^2$, veremos que ela tem dois zeros com

valor absoluto $|z| = 1$, a saber: i e $-i$.)

A segunda diferença é o fato de que não se tem uma fórmula simples para os coeficientes b_n da série $\frac{1}{f(x)} = b_0 + b_1x + \ldots$ em função dos a_n.

Na prática, quando se precisa saber os valores dos b_n, aplica-se o *método dos coeficientes a determinar*, que consiste em escrever, sucessivamente:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = 1;$$

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots = 1;$$

$$(*) \quad a_0b_0 = 1, \; a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \; a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0, \ldots$$

A primeira equação, $a_0b_0 = 1$, dá $b_0 = 1/a_0$. A partir daí, cada b_n é determinado sucessivamente em função dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, que foram obtidos nas equações anteriores. A hipótese $a_0 \neq 0$ assegura que o sistema de infinitas equações (*) possui uma solução única, obtida por recorrência.

O leitor atento deverá ter observado que, para obter as equações (*) a partir da igualdade anterior, foi utilizado o seguinte fato: se uma série de potências $\Sigma c_n x^n$ assume o valor 1 para todo x num certo intervalo $(-s, s)$ então $c_0 = 1$ e $c_n = 0$ para todo $n > 1$. Isto é um caso particular do *princípio de identidade*, ou *teorema de unicidade* para série de potências, análogo ao princípio de identidade de polinômios: se duas séries de potências convergentes no intervalo I assumem o mesmo valor $\Sigma a_n x^n = \Sigma b_n x^n$ para todo x pertencente a um conjunto $E \subset I$ que possui (pelo menos) um ponto de acumulação em I, então $a_n = b_n$ para todo n. Isto será demonstrado logo mais. Voltemos ao inverso de uma série de potências, cuja existência demonstraremos agora, sem usar o princípio de identidade, que apareceu apenas para indicar como se calculam os coeficientes do inverso.

Temos, então, uma série de potências que converge, para todo $x \in (-r, r)$, a um valor $f(x) = \Sigma a_n x^n$. Queremos provar que,

se $a_0 = f(0) \not\equiv 0$, então existe uma série de potências $\Sigma b_n x^n$, convergente num intervalo $(-s, s) \subset (-r, r)$, tal que, para todo $x \in (-s, s)$, se tem $\Sigma b_n x^n = 1/f(x)$. Evidentemente, basta considerar o caso $a_0 = 1$.

Ora, f é uma função contínua em $(-r, r)$. Como $f(0) = 1$, existe $s > 0$ tal que $x \in (-s, s) \Rightarrow |f(x) - 1| < 1$. Para todo $x \in (-s, s)$ podemos, então, escrever

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 + [f(x) - 1]} = 1 - [f(x) - 1] + [f(x) - 1]^2 - \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right)^n.$$

Pelo Teorema 14, podemos escrever $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x^k$ (onde pomos $c_{nk} = 0$ se $k < n$). Assim, para todo $x \in (-s, s)$, temos $\dfrac{1}{f(x)} = \sum_n \left[\sum_k (-1)^n c_{nk} x^k \right]$. Se pudermos inverter a ordem dos somatórios, obteremos, para todo $x \in (-s, s)$:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{nk} \right] x^k,$$

o que exprimirá $1/f(x)$ como série de potências no intervalo $(-s, s)$. (Os coeficientes são $b_k = \sum_k (-1)^n c_{nk}$.) Para justificar a inversão da ordem de somação, apelamos para o Teorema 8, o qual exige que, para todo n, $\sum_k |c_{nk} x^k|$ convirja (o que é óbvio, em se tratando de uma série de potências) e que $\sum_n (\sum_k |c_{nk} x^k|)$ também convirja, o que não é tão evidente assim. Provemos este fato.

A série $\varphi(x) = \sum_k |a_k| x^k$ tem o mesmo raio de convergência que $\Sigma a_k x^k$. Além disso, $\varphi(0) = |a_0| = 1$, de modo que podemos diminuir o número $s > 0$ de tal modo que $|\varphi(x) - 1| < 1$

e $|f(x) - 1| < 1$ para todo $x \in (-s, s)$. Para tais x e todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $[\varphi(x) - 1]^n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| x^k\right)^n = \left(\sum_{k\geq 1} |a_k| x^k\right)^n = \sum_{k\geq 1} d_{nk} x^k$. Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(x) - 1|^n$ converge para todo $x \in (-s, s)$, vemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k\geq 1} d_{nk} x^k\right)$ é convergente para todo $x \in (-s, s)$. Concluiremos a convergência de $\sum_n \left(\sum_k |c_{nk} x^k|\right)$ se provarmos que $|c_{nk}| \leq d_{nk}$ para todo n e todo k. Isto se faz por indução em n. O caso $n = 0$ é óbvio. Seja $n > 0$ e suponhamos que $|c_{nk}| \leq d_{nk}$ para todo k. Provemos que isto implica $|c_{n+1,k}| \leq d_{n+1,k}$ para todo k. Estes números são definidos pelas relações

$$\left(\sum_k a_k x^k\right)^n = \sum_k c_{nk} x^k \quad \text{e} \quad \left(\sum_k |a_k| x^k\right)^n = \sum_k d_{nk} x^k.$$

Notando que

$$\begin{aligned}\left(\sum_k a_k x^k\right)^{n+1} &= \left(\sum_k a_k x^k\right)^n \cdot \left(\sum_k a_k x^k\right) \\ &= \left(\sum_k c_{nk} x^k\right)\left(\sum_k a_k x^k\right)\end{aligned}$$

o Teorema 14 nos dá:

$$c_{n+1,k} = a_0 c_{nk} + a_1 c_{n,k-1} + \cdots + a_k c_{n0}.$$

Analogamente:

$$d_{n+1,k} = |a_0| d_{nk} + |a_1| d_{n,k-1} + \cdots + |a_k| d_{n0}.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}|c_{n+1,k}| &\leq |a_0||c_{nk}| + \cdots + |a_k||c_{n0}| \\ &\leq |a_0| d_{nk} + \cdots + |a_k| d_{n0} = d_{n+1,k}.\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Em resumo, temos o

Teorema 15. *Seja* $\Sigma a_n x^n$ *uma série de potências que converge ao valor* $f(x)$, *para todo* $x \in (-r, r)$. *Se* $a_0 \neq 0$, *então existem* $s > 0$ *e uma série de potências* $\Sigma b_n x^n$ *que converge, para todo* $x \in (-s, s)$, *ao valor* $1/f(x)$.

4 Funções analíticas

Retomaremos agora a noção de função analítica, que foi introduzida no §4, Capítulo VIII.

Uma função $f \colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I, chama-se *analítica* quando é de classe C^∞ e, para todo $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in I$ e que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado por uma série de potências, a saber, uma série de Taylor. Ora, pelo corolário do Teorema 13, toda função representada por uma série de potências é de classe C^∞ e, se $f(x) = \Sigma a_n \cdot (x - x_0)^n$, então $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor.

Podemos então simplificar a definição anterior e dizer que uma função $f \colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto, é analítica quando, para cada $x_0 \in I$, existem $r > 0$, com $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$, e uma série de potências $\Sigma a_n (x - x_0)^n$ tal que, para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, vale $f(x) = \Sigma a_n (x - x_0)^n$.

Em resumo, uma função $f \colon I \to \mathbb{R}$ é analítica quando, na vizinhança de cada ponto $x_0 \in I$, o valor de f é dado por uma série de potências do tipo $\Sigma a_n \cdot (x - x_0)^n$. Note que a série varia com o ponto x_0 (já que seus coeficientes são expressos em função das derivadas $f^{(n)}(x_0)$). Mais ainda: mesmo que a função seja

analítica em toda a reta, sua série de potências em torno de um ponto x_0 não precisa convergir em toda a reta.

A soma e o produto de funções analíticas $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função analítica em I. Com efeito, para cada $x_0 \in I$ temos $f(x) = \Sigma a_n \cdot (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < r$ e $g(x) = \Sigma b_n \cdot (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < s$. Seja $t = \min\{r, s\}$. Então, se $|x - x_0| < t$, valem: $f(x) + g(x) = \Sigma(a_n + b_n)(x - x_0)^n$ e $f(x) \cdot g(x) = \Sigma c_n \cdot (x - x_0)^n$, com $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$. Em particular, como uma constante e a função x são evidentemente analíticas em $\mathbb{R}$, todo polinômio é uma função analítica em R.

Também se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função analítica que não se anula em ponto algum de I, seu inverso $1/f$ é uma função analítica em I, em virtude do Teorema 15. Em particular, uma função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ (quociente de dois polinômios) é analítica em todo intervalo aberto onde não se anula o denominador. Assim, por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é analítica em toda a reta. A série de potências desta função em torno do ponto $x_0 = 0$, ou seja, a série $\Sigma(-1)^n x^{2n}$, só converge no intervalo $(-1, 1)$ mas o Teorema 15 garante que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe uma série de potências $\Sigma a_n \cdot (x - x_0)^n$, convergente num certo intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, tal que $\dfrac{1}{1 + x^2} = \Sigma a_n \cdot (x - x_0)^n$ para todo x em tal intervalo. Os coeficientes a_n podem ser obtidos pelo método dos coeficientes a determinar, a partir da igualdade $1 = (1 + x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Para usar o princípio de identidade de séries de potências, (que ainda não foi demonstrado!) devemos, antes de mais nada, desenvolver $1 + x^2$em potências de $x - x_0$, o que é fácil:

$$1 + x^2 = 1 + [(x - x_0) + x_0]^2 = 1 + x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2.$$

Em seguida, escrevemos

$$1 = [1 + x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2] \cdot [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots],$$

efetuamos o produto indicado no segundo membro, e igualamos os coeficientes das mesmas potências de $x-x_0$ nos dois membros da igualdade.

Para completar a relação entre funções analíticas e séries de potências devemos mostrar que se a série $\Sigma a_n \cdot (x-x_0)^n$ converge para todo $x \in (x_0-r, x_0+r)$ então a função $f\colon (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \Sigma a_n \cdot (x-x_0)^n$, é analítica. (Não, caro leitor. Isto *não está* incluído na definição de função analítica. Devemos mostrar que, para todo $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$, existe uma série de potências da forma $\Sigma b_n \cdot (x-x_1)^n$, que converge, numa vizinhança de x_1, para a soma $f(x)$.) Por simplicidade, suporemos $x_0 = 0$ e o fato em questão resulta do

Teorema 16. *Seja* $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \Sigma a_n \cdot x^n$. *Para todo* $x_0 \in (-r, r)$, *existe uma série de potências* $\Sigma b_n \cdot (x-x_0)^n$ *tal que* $f(x) = \Sigma b_n \cdot (x-x_0)^n$ *se* $|x-x_0| < r-|x_0|$.

Demonstração. Se $|x - x_0| < r - |x_0|$ então $|x_0| + |x - x_0| < r$. Logo a série $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para $x = |x_0| + |x - x_0|$, isto é, $\Sigma |a_n| (|x_0| + |x-x_0|)^n < +\infty$. Pelo Binômio de Newton, vem

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} \cdot |x - x_0|^k < +\infty.$$

Isto justifica a inversão da ordem de somação abaixo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot [x_0 + (x - x_0)]^n = \text{(binômio de Newton)} \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \cdot (x - x_0)^k = \text{(inversão de ordem)} \\
&= \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right] (x - x_0)^k = \sum_{k \geq 0} b_k \cdot (x - x_0)^k.
\end{aligned}$$

Uma das propriedades que distinguem as funções analíticas das funções C^∞ é dada pelo

Teorema 17. *Se uma função analítica* $f: I \to \mathbb{R}$ *se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de* I, *então* f *se anula em todos os pontos de* I.

Demonstração. Seja A o conjunto dos pontos de I nos quais f se anula juntamente com todas as suas derivadas. Afirmamos que A é aberto. Com efeito, tomemos $x_0 \in A$. Como f é analítica, existe um intervalo aberto $J \subset I$, de centro x_0, tal que $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ para todo $x \in J$. Como $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \geq 0$, concluímos que $f(x) = 0$, seja qual for $x \in J$. Segue-se daí que todas as derivadas de f se anulam nos pontos de J e portanto A é mesmo aberto. Agora consideremos o conjunto B, formado pelos pontos $x \in I$ nos quais alguma derivada $f^{(n)}(x)$ é diferente de zero. (Isto inclui $n = 0$, ou seja, $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in B$.) Como tal derivada é uma função contínua, se $x_0 \in B$, isto é, se $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ para algum $n \geq 0$, então existirá um intervalo J, de centro x_0, tal que $f^{(n)}(x) \neq 0$ (mesmo n) para todo $x \in J$. (Veja o corolário do Teorema 3 Capítulo VII.) Portanto B também é um subconjunto aberto de I. Ora, é evidente que $I = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$. Por hipótese, A não é vazio. Pelo corolário na pág. 169, concluímos que $B = \emptyset$, ou seja, $A = I$, o que demonstra o teorema.

Corolário. *Sejam* $f, g: I \to \mathbb{R}$ *analíticas. Se, para algum* $x_0 \in I$, *tem-se* $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *então* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in I$.

Lema. *Seja* f *uma função* C^∞ *num intervalo* I. *Seja* $X \subset I$ *um conjunto com um ponto de acumulação* $x_0 \in I$. *Se* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in X$, *então* $f^{(n)}(x_0) = 0$ *para todo* $n \geq 0$.

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência crescente ou decrescente de pontos de X, com $\lim x_n = x_0$. (A demonstração do Teorema 7, Capítulo V, nos dá apenas $|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$,

mas, tomando apenas os x_n de um mesmo lado de x_0, obtemos uma seqüência monótona.) então $f(x_0) = \lim f(x_n) = 0$. Além disso, $f'(x_0) = \lim \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Pelo Teorema de Rolle existe, para cada n, um ponto y_n, situado entre x_n e x_{n+1}, tal que $f'(y_n) = 0$. A seqüência (y_n) assim obtida é estritamente monótona, com $\lim y_n = x_0$. Logo $f''(x_0) = \lim \frac{f'(y_n) - f'(x_0)}{y_n - x_0} = 0$. E assim por diante: todas as derivadas de f se anulam no ponto x_0.

Teorema 18. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *uma função analítica tal que* $f(x)=0$ *para todo* $x \in X$*, onde* $X \subset I$ *é um conjunto com um ponto de acumulação* $x_0 \in I$*. Então* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in I$.

Demonstração. Pelo Lema, temos $f^{(n)}(x_0)=0$ para todo $n \geq 0$. O corolário do Teorema 17 nos dá $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Corolário 1. (Princípio de Identidade para funções analíticas.) *Sejam* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *funções analíticas e* $X \subset I$ *um conjunto com um ponto de acumulação em* I*. Se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in X$ *então* $f = g$.

Corolário 2. (Princípio de Identidade para séries de potências.) *Sejam* $\Sigma a_n x^n$ *e* $\Sigma b_n x^n$ *séries de potências convergentes no intervalo* $(-r, r)$ *e* $X \subset (-r, r)$ *um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se* $\Sigma a_n x^n = \Sigma b_n x^n$ *para todo* $x \in X$ *então* $a_n = b_n$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Com efeito, as funções $f(x) = \Sigma a_n x^n$ e $g(x) = \Sigma b_n x^n$ são analíticas no intervalo $(-r, r)$. Pelo Corolário 1, temos $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (-r, r)$. Daí resulta que $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ para todo $n \geq 0$. Portanto, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ para todo $n \geq 0$.

Nota sobre funções complexas (Leitura opcional)

A composta $g \circ f$ de duas funções analíticas g e f é ainda analítica. Este é um fato importante, que não demonstraremos aqui. (O leitor pode fazê-lo, usando a mesma técnica da demonstração do Teorema 15, ou seja, a substituição de uma série de potências em outra.) Vamos indicar como se pode deduzir este fato a partir da noção de função analítica complexa. (A teoria das funções analíticas de uma variável complexa é uma das continuações naturais dos estudos iniciados neste livro.)

A noção de derivada de uma função complexa de variável complexa é definida formalmente da mesma maneira que a derivada de uma função real: $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, desde que este limite exista. Mas há uma diferença fundamental em relação ao caso real. Algo de maravilhoso acontece: se uma função $f \colon U \to \mathbb{C}$ possui derivada em todos os pontos de um aberto U do plano complexo $\mathbb{C}$, então sua derivada $f'(z)$ é automaticamente contínua em U. Mais ainda, existem $f''(z)$, $f'''(z)$ e as derivadas de todas as ordens em todos os pontos $z \in U$. Assim, f derivável num aberto U implica $f \in C^\infty$. Isto, porém, não é tudo: f é analítica! Ou seja, todo $z_0 \in U$ é centro de um disco de raio r, contido em U, tal que $|z - z_0| < r \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$. Reciprocamente, se $f(z) = \Sigma a_n (z - z_0)^n$ é dada por uma série de potências, convergente no disco $|z - z_0| < r$, então f é derivável (e, portanto, analítica) nesse disco. Assim fica fácil provar, por exemplo, que a inversa $1/f(z)$ de uma função analítica complexa $f(z)$ (que nunca se anula) é analítica. Basta verificar que $1/f$ tem derivada, a qual é fornecida pela fórmula $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$, como no caso real. Também é fácil provar que a composta $g \circ f$ de duas funções analíticas complexas é analítica. De fato, sendo g e f deriváveis, $g \circ f$ é derivável, com $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.

Mas que tem isso a ver com funções analíticas reais? Tem a ver que se a série de potências $\Sigma a_n x^n$ (real) converge no intervalo

$(-r, r)$ então a série de potências $\Sigma a_n z^n$ converge no disco aberto $|z| < r$. Daí resulta que toda função analítica real $f \colon I \to \mathbb{R}$ se estende a uma função analítica complexa $F \colon U \to \mathbb{C}$, onde U é um aberto do plano complexo $\mathbb{C}$, tal que $U \cap \mathbb{R} = I$.

Note-se que, por ser uma extensão de f, F transforma números reais em números reais. Isto significa que, se $F(z) = \Sigma a_n (z - x_0)^n$ é a expressão de F em série de potências em torno de um número real x_0, então os coeficientes a_n são reais. Isto fornece um método de demonstração para teoremas sobre funções analíticas reais, usando propriedades das funções complexas. Por exemplo: suponha que $f \colon I \to \mathbb{R}$ é analítica e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, tomando um aberto U suficientemente pequeno, com $I \subset U \subset \mathbb{C}$, teremos ainda $F(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Logo (como vimos acima) $\frac{1}{F} \colon U \to \mathbb{C}$ é analítica. Para $x \in U$ real, evidentemente $\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{f(x)}$ é real. Logo a restrição de $\frac{1}{F}$ a $I = U \cap \mathbb{R}$ é uma função analítica real, igual a $\frac{1}{f}$. Outro exemplo: sejam f e g funções analíticas reais, tais que $g \circ f$ tem sentido. Estendendo-as, obtemos funções analíticas complexas F e G, cuja composta $G \circ F$, é analítica porque é derivável. Para x real, $(G \circ F)(x) = G(F(x)) = g(f(x))$ é real. Logo $g \circ f$ é uma função analítica real.

5 Eqüicontinuidade

Nosso objetivo agora é determinar sob que condições a respeito de um conjunto E de funções contínuas (todas com o mesmo domínio) pode-se garantir que qualquer seqüência com termos $f_n \in E$ possui uma subseqüência uniformemente convergente. Este tipo de questão ocorre com certa freqüência em Análise: basta citar o Cálculo das Variações, a Teoria das Equações Diferenciais e as Funções de uma Variável Complexa.

Se, em vez de um conjunto de funções contínuas, tivéssemos um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$, veríamos logo que, a fim de que toda

seqüência de pontos $x_n \in E$ possua uma subseqüência convergente, é necessário e suficiente que E seja um conjunto limitado de números reais. Voltando a um conjunto E de funções contínuas $f \colon E \to \mathbb{R}$, seríamos tentados a usar a limitação como resposta. O Exemplo 4 mostra, entretanto, uma seqüência de funções contínuas $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, tais que $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{4}$ para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Mas (f_n) não possui subseqüência uniformemente convergente. (Com efeito, tal subseqüência deveria tender uniformemente para zero, o que é impossível, pois cada f_n assume o valor $\frac{1}{4}$ em algum ponto do intervalo $[0,1]$.)

Não basta então que as funções $f \in E$ tomem valores no mesmo intervalo limitado para que toda seqüência em E possua uma subseqüência uniformemente convergente. É preciso uma hipótese adicional, que introduziremos agora: a eqüicontinuidade.

Seja E um conjunto de funções $f \colon X \to \mathbb{R}$, todas com o mesmo domínio $X \subset \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que o conjunto E é *eqüicontínuo no ponto* x_0 quando, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ qualquer que seja } f \in E.$$

O fato crucial a respeito desta definição é que, além de todas as funções f serem contínuas no ponto x_0, o número δ escolhido a partir do ε dado é o mesmo para todas as funções f do conjunto E.

Diz-se que (f_n) é uma *seqüência eqüicontínua* no ponto $x_0 \in X$ quando o conjunto $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ é eqüicontínuo no ponto x_0.

Na terminologia do §2, dizer que a seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ é eqüicontínua no ponto $x_0 \in X$ equivale a afirmar que $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ uniformemente em relação a n.

Vamos considerar apenas, no que se segue, conjuntos de funções $f \colon X \to \mathbb{R}$ que são eqüicontínuos em todos os pontos de X. Quanto à eqüicontinuidade num único ponto, observaremos

apenas a seguinte conseqüência da Observação 2 após o Teorema 3: se uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ é eqüicontínua no ponto x_0 e $\lim f_n = f$ simplesmente em X, então f é contínua no ponto x_0.

Um conjunto E de funções $f: X \to \mathbb{R}$ chama-se *eqüicontínuo* quando E é eqüicontínuo em todos os pontos $x_0 \in X$. Analogamente, uma seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ diz-se *eqüicontínua* quando é eqüicontínua em todos os pontos $x_0 \in X$.

Exemplos.

22. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto discreto então qualquer conjunto E de funções $f: X \to \mathbb{R}$ é eqüicontínuo.

23. O conjunto formado por uma única função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ é evidentemente eqüicontínuo. Se os conjuntos $E_1, \ldots, E_n$, formados por funções reais com o mesmo domínio $X \subset \mathbb{R}$, são eqüicontínuos no ponto $x_0 \in X$, então a reunião $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ é um conjunto eqüicontínuo no ponto x_0. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ tais que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta_i \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para toda $f \in E_i$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. É claro que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, qualquer que seja $f \in E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$. Em particualr, se as funções $f_1, \ldots, f_n: X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $x_0 \in X$, então o conjunto $E = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é eqüicontínuo neste ponto. Finalmente, se E é um conjunto eqüicontínuo no ponto x_0 e $F \subset E$ então F também é eqüicontínuo neste ponto.

24. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: X \to \mathbb{R}$ então o conjunto $E = \{f, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$ é eqüicontínuo. Com efeito, seja $x_0 \in X$. Como sabemos, f é contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$; $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n_0$ e $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Então, quando $n > n_0$, as condições $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ implicam $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq$

$|f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. Isto estabelece a eqüicontinuidade do conjunto E no ponto arbitrário $x_0 \in E$. Usamos este fato para concluir que a seqüência de funções $f_n(x) = \dfrac{\text{sen}(nx)}{n}$ é eqüicontínua em toda a reta. Observamos ainda que, sendo a eqüicontinuidade uma propriedade local, a seqüência de funções contínuas $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ é eqüicontínua desde que cada ponto $x_0 \in X$ seja centro de um intervalo I tal que (f_n) convirja uniformemente em $I \cap X$. Assim, por exemplo, a seqüência de funções $g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $g_n(x) = \dfrac{x}{n}$, é eqüicontínua na reta $\mathbb{R}$, pois a convergência $g_n \to 0$ é uniforme em cada parte limitada $X \subset \mathbb{R}$, embora não o seja em toda a reta.

25. A seqüência de funções contínuas $f_n(x) = n \cdot x$, definidas em toda reta, não é eqüicontínua em ponto algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, qualquer que seja $\delta > 0$ podemos obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \delta$ e então o ponto $x = x_0 + \dfrac{1}{n}$ cumpre $|x - x_0| = \dfrac{1}{n} < \delta$ mas $|f_n(x) - f_n(x_0)| = 1 > \varepsilon$.

26. A seqüência de funções $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \text{sen}(nx)$, não é eqüicontínua em ponto algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Com efeito, seja $\varepsilon = 1/2$. Dado qualquer $\delta > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2\pi}{n} < \delta$. Mostremos que se pode encontrar x, com $|x - x_0| < \delta$ e $|f_n(x) - f_n(x_0)| > \varepsilon$. Começamos escolhendo um número $b \in [-1, 1]$ tal que $|b - \text{sen}(nx_0)| \geq 1$. Quando x varia de x_0 até $x_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, o ponto nx varia entre nx_0 e $nx_0 + 2\pi$, e, portanto, $\text{sen}(nx)$ assume todos os valores entre -1 e $+1$. Logo existe $x \in \left[x_0, x_0 + \dfrac{2\pi}{n}\right]$ tal que $\text{sen}(nx) = b$. Para tal valor de x, temos $|x - x_0| < \delta$ e $|f_n(x) - f_n(x_0)| = |b - \text{sen}(nx_0)| \geq 1 > \varepsilon$. Concluímos então, pelo Exemplo 24, que a seqüência $(\text{sen}(nx))$ não converge uniformemente em intervalo algum da reta. Na re-

alidade, o leitor pode notar que o argumento usado acima mostra que nenhuma subseqüência de $(\operatorname{sen}(nx))$ é eqüicontínua em ponto algum da reta e, por conseguinte, nenhuma subseqüência converge uniformemente em intervalo algum.

27. O exemplo mais comum de conjunto eqüicontínuo é o seguinte. Tem-se um conjunto E de funções deriváveis num intervalo I e uma constante $c > 0$ tal que $|f'(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ e todo ponto $x \in I$. Então E é eqüicontínuo. Com efeito, seja $x_0 \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Se $x \in I$ é tal que $|x - x_0| < \delta$ então, pelo Teorema do Valor Médio, temos $|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < \varepsilon$, para toda $f \in E$. Mais geralmente, o mesmo argumento mostra que E é eqüicontínuo desde que, para cada ponto $x \in I$, existam uma constante $c_x > 0$ e um intervalo J_x tais que $x \in J_x \subset I$ e $|f'(y)| \leq c_x$ para todo $y \in J_x$ e toda $f \in E$.

28. Como caso particular do exemplo anterior, seja F um conjunto de funções $f\colon I \to \mathbb{R}$, contínuas no intervalo I. Suponhamos que exista uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in I$ e toda $f \in F$. Então, fixado um ponto $a \in I$, o conjunto E das integrais indefinidas $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, das funções de F é eqüicontínuo. Com efeito, para todo $x \in I$ e toda $\varphi \in E$, temos $|\varphi'(x)| = |f(x)| \leq c$.

Um conjunto E de funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ chama-se *uniformemente eqüicontínuo* quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, seja qual for $f \in E$.

Por exemplo, se as funções de E são deriváveis no intervalo I e $|f'(x)| \leq c$ para toda $f \in E$, como no Exemplo 27, então E é uniformemente eqüicontínuo.

Uma única função contínua mas não uniformemente contínua fornece um exemplo de conjunto que é eqüicontínuo, porém não uniformemente.

Teorema 19. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Todo conjunto eqüicontínuo de funções $f\colon K \to \mathbb{R}$ é uniformemente eqüicontínuo.*

Demonstração. Seja E um conjunto eqüicontínuo de funções $f\colon K \to \mathbb{R}$. Se E não fosse uniformemente eqüicontínuo, poderíamos obter $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos $x_n, y_n \in K$ e uma função $f_n \in E$, tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ mas $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Passando a uma subseqüência, se necessário, poderíamos (em virtude da compacidade de K) supor que $x_n \to x \in K$ e, como $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, teríamos também $y_n \to x$. Como E é eqüicontínuo no ponto x, existe $\delta > 0$ tal que $|z - x| < \delta$, $z \in K$, $f \in E \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ora, para todo n suficientemente grande, viriam $|x_n - x| < \delta$ e $|y_n - x| < \delta$, donde $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, uma contradição.

Mostraremos agora que, para conjuntos eqüicontínuos, convergência simples implica convergência uniforme das partes compactas. Na realidade, algo mais é verdadeiro, como mostra o

Teorema 20. *Se uma seqüência eqüicontínua de funções* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *converge simplesmente num subconjunto denso* $D \subset X$, *então* f_n *converge uniformemente em cada parte compacta* $K \subset X$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, mostraremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Com efeito, para todo $d \in D$ existe $n_d \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_d \Rightarrow |f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Além disso, para todo $y \in K$, existe um intervalo aberto J_y, de centro y, tal que $x, z \in X \cap J_y \Rightarrow |f_n(x) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, da cobertura $K \subset \bigcup_y J_y$ podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset J_1 \cup \cdots \cup J_p$. Sendo D denso em X, em cada um dos intervalos J_i podemos escolher um número $d_i \in J_i \cap D$. Seja $n_0 = \max\{n_{d_1}, \ldots, n_{d_p}\}$. Então, se $m, n > n_0$ e $x \in K$, deve existir i tal que $x \in J_i$. Logo

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(d_i)| + |f_m(d_i) - f_n(d_i)| + |f_n(d_i) - f_n(x)|.$$

Portanto $m, n > n_0$, $x \in K \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Assim, f_n converge uniformemente em K, pelo Teorema 1.

Exemplo 29. Se uma seqüência de funções $f_n \colon I \to \mathbb{R}$, deriváveis no intervalo I, converge simplesmente em I para uma função f e, além disso $|f'_n(x)| \leq c$ para todo n e todo $x \in I$, então a convergência é uniforme em cada parte compacta de I. Assim, por exemplo, a seqüência de funções $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, que converge simplesmente, mas não uniformemente, para zero no intervalo $[0, 1]$, só o faz porque as derivadas $f'_n(x)$ não são uniformemente limitadas por uma constante em $[0, 1]$.

Um conjunto E de funções $f \colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *simplesmente limitado* (ou pontualmente limitado) quando para cada $x \in X$ existe um número $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para toda $f \in E$.

Geometricamente, isto significa que, levantando uma vertical por cada ponto $x \in X$, os gráficos das funções $f \in E$ cortam essa vertical num conjunto limitado de pontos.

Por exemplo, todo conjunto finito de funções é simplesmente limitado.

Um conjunto E de funções $f \colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *uniformemente limitado* quando existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ e todo $x \in X$.

Isto significa que os gráficos das funções $f \in E$ estão todos contidos na faixa $-c \leq y \leq c$.

Uma função não-limitada é um exemplo de um conjunto simplesmente, porém não uniformemente, limitado.

Uma seqüência (f_n) diz-se *simplesmente* (ou *uniformemente*) *limitada* quando o conjunto $\{f_1, f_2, \dots\}$ for simplesmente (ou uniformemente) limitado.

Exemplo 30. Se cada função $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ é limitada e $f_n \to f$ uniformemente em X então f é limitada e (f_n) é uma seqüência uniformemente limitada. Com efeito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1$ para todo $x \in X$. Daí resulta $|f(x)| < |f_{n_0}(x)| + 1$ para todo $x \in X$. Como f_{n_0} é limitada, o mesmo se dá com f. Seja $c > 0$ uma constante tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo

$x \in X$ e todo $n < n_0$. Suponhamos ainda que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$. Se for $n \geq n_0$, temos $|f_n(x)| < |f(x)|+1 \leq c+1$ para todo $x \in X$. Assim sendo, podemos garantir que $|f_n(x)| \leq c + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$.

Teorema 21. (Cantor-Tychonov). *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *enumerável. Toda seqüência simplesmente limitada de funções* $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ *possui uma subseqüência simplesmente convergente.*

Demonstração. Seja $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$. A seqüência $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$, sendo limitada, possui uma subseqüência convergente. Assim, podemos obter um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que existe o limite $a_1 = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x_1)$. Também é limitada a seqüência $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}_1}$. Logo podemos achar um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que o limite $a_2 = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}_2} f_n(x_2)$ existe. Prosseguindo analogamente, conseguimos, para cada $i \in \mathbb{N}$, um subconjunto infinito $\mathbb{N}_i \subset \mathbb{N}$, de tal forma que $\mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_i \supset \ldots$ e, para cada i, existe o limite $a_i = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}_i} f_n(x_i)$. Definimos então um subconjunto infinito $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ tomando como i-ésimo elemento de $\mathbb{N}^*$ o i-ésimo elemento de $\mathbb{N}_i$. Desta maneira, para cada $i \in \mathbb{N}$, a seqüência $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}^*}$ é, a partir do seu i-ésimo elemento, uma subseqüência de $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}_i}$ e, portanto, converge. Isto prova que a subseqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge em cada ponto $x_i \in X$, o que demonstra o teorema.

Teorema 22. (Ascoli-Arzelá). *Seja* $K \subset \mathbb{R}$ *compacto. Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções* $f_n \colon K \to \mathbb{R}$ *possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

Demonstração. Invocando o Teorema 6 do Capítulo V obtemos um subconjunto enumerável $X \subset K$, denso em K. Pelo Teorema 21, (f_n) possui uma subseqüência que converge simplesmente em X. A mesma seqüência converge uniformemente em K, pelo Teorema 20.

Corolário. *Seja* I *um intervalo aberto. Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções* $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ *possui*

uma subseqüência que converge uniformemente em cada parte compacta de I.

Segue-se evidentemente do Teorema 22 que, para cada parte compacta $K \subset I$, existe uma subseqüência de (f_n) que converge uniformemente em K. Mas isto não basta. O corolário exige a existência de uma única subseqüência que convirja em todas as partes compactas de I. Para obtê-la, usaremos novamente o "método da diagonal" de Cantor, que foi empregado na demonstração do Teorema 21. (Veja também o Teorema 11, Capítulo II.)

Começamos escrevendo $I = \cup K_i$, reunião enumerável de compactos K_i, tais que $K_i \subset \text{int } K_{i+1}$. Então cada compacto $K \subset I$ está contido em algum dos K_i. (Prova: os interiores dos K_i formam uma cobertura aberta de K, da qual se retira uma subcobertura finita, $K \subset \text{int } K_{i_1} \cup \cdots \cup \text{int } K_{i_n}$, com $i_1 < \cdots < i_n$. Logo $K \subset K_{i_n}$, como queríamos.)

Usando sucessivamente o Teorema 22 obtemos, como na demonstração do Teorema 21, uma seqüência decrescente de conjuntos infinitos de números naturais $\mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \mathbb{N}_3 \supset \ldots$ de modo que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a subseqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_i}$ convirja uniformemente em K_i. Formamos o conjunto $\mathbb{N}^*$, cujo i-ésimo elemento é igual ao i-ésimo elemento de $\mathbb{N}_i$ e concluímos (como no Teorema 21) que a subseqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente em cada K_i. Como todo compacto $K \subset I$ está contido em algum K_i, o corolário está demonstrado.

O Teorema 22 contém a parte mais útil da proposição seguinte, que é mais completa e também poderia ter sido chamada "Teorema de Ascoli-Arzelá".

Teorema 23. *Seja* E *um conjunto de funções contínuas definidas no compacto* $K \subset \mathbb{R}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

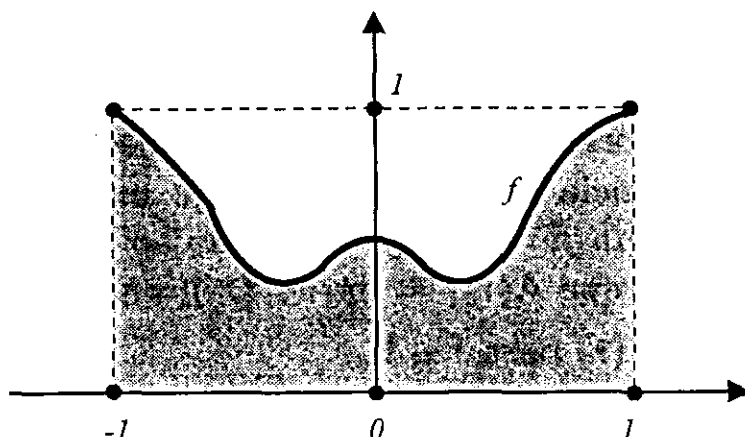
(1) E *é eqüicontínuo e uniformemente limitado;*

(2) E *é eqüicontínuo e simplesmente limitado;*

(3) *Toda seqüência de funções* $f_n \in E$ *possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

Demonstração. É evidente que (1)⇒(2) e, pelo Teorema 22, que (2)⇒(3). Resta, portanto, mostrar que (3)⇒(1). Procedamos por absurdo. Supondo (3) e admitindo que E não fosse eqüicontínuo em algum ponto $x_0 \in K$, existiria um $\varepsilon > 0$ para o qual poderíamos obter uma seqüência de pontos $x_n \in K$, com $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e funções $f_n \in E$ tais que $|f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subseqüência, se necessário, (em virtude da hipótese (3)) podemos admitir que $f_n \to f$ uniformemente em K. Então (veja o Exemplo 24) a seqüência (f_n) é eqüicontínua: existe $\delta > 0$ tal que $x \in K$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, tomando $n > \frac{1}{\delta}$, obtemos $|x_n - x_0| < \delta$, donde $|f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, o que é uma contradição. Logo (3) implica que E é eqüicontínuo. Mostremos, finalmente, que E é uniformemente limitado. De fato, se não fosse assim existiria, para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f_n \in E$ tal que $\sup_{x \in K} |f_n(x)| > n$. Então nenhuma subseqüência de (f_n) seria uniformemente limitada, o que contradiz (3), em vista do Exemplo 30.

Como aplicação do Teorema de Ascoli-Arzelá, vejamos um exemplo simples de um problema de "máximo e mínimo" no qual, ao contrário do caso comum em Cálculo, em vez de um *ponto* busca-se uma *função* que torne máxima ou mínima uma certa expressão. O estudo desses problemas constitui o chamado Cálculo das Variações, onde o Teorema de Ascoli-Arzelá é um instrumento útil para demonstrar a existência de soluções. Começaremos com um caso sem solução.

Seja F o conjunto das funções contínuas $f\colon [-1, 1] \to [0, 1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$. A cada função $f \in F$ associemos o número $A(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

$A(f)$ é a área hachurada

O problema consiste em achar $f_0 \in F$ tal que a área $A(f_0)$ seja mínima, isto é, $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in F$. Tal função f_0 não existe.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n \colon [-1, 1] \to [0, 1]$, definida por $f_n(x) = x^{2n}$, pertence a F. Como se vê facilmente, $A(f_n) = 2/(2n + 1)$. Logo, $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in F$ implicaria $A(f_0) \leq A(f_n)$ para todo n e, portanto, $A(f_0) = 0$. Mas $A(f_0) > 0$ se $f_0 \in F$. Assim o problema proposto não tem solução. Em outras palavras: existem funções $f \in F$ tais que $A(f)$ seja tão pequeno quanto se queira, mas nenhum valor $A(f_0)$ é menor que todos os outros. Note que F não é eqüicontínuo.

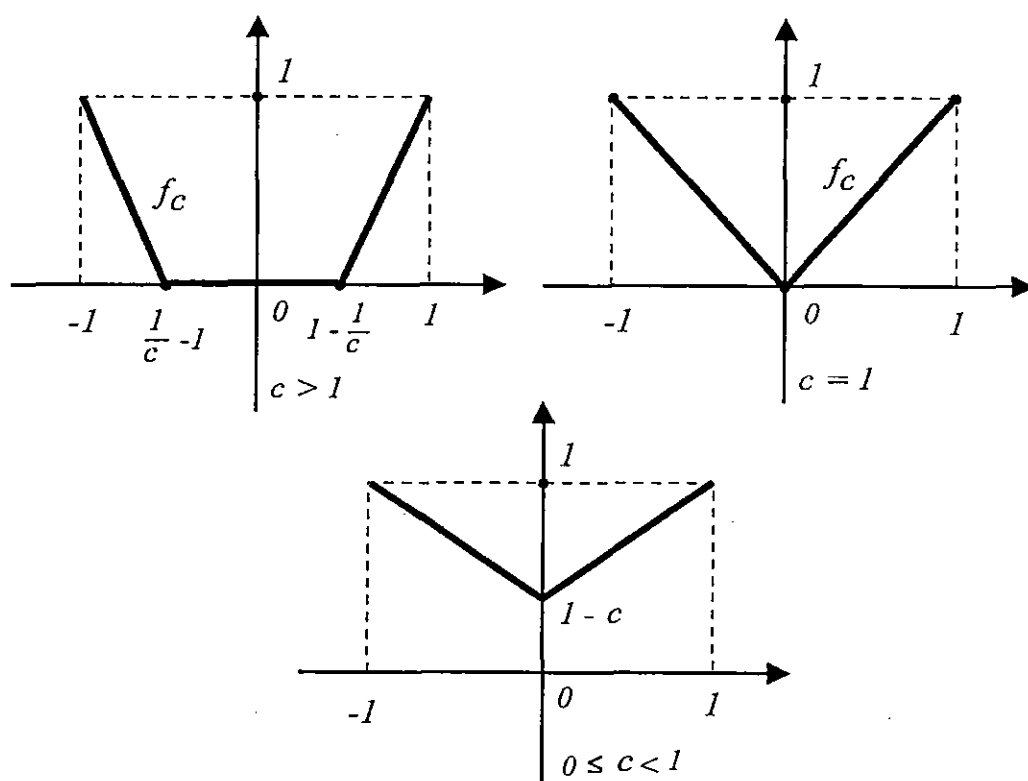
Reformulando a questão, fixemos uma constante $c > 0$ e consideremos o conjunto E_c formado pelas funções $f \colon [-1, 1] \to [0, 1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$ e, além disso, $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ para quaisquer x, $y \in [-1, 1]$. Mostraremos, usando o Teorema de Ascoli-Arzelá, que (para cada $c > 0$ dado) existe uma função $f_c \in E_c$ tal que $A(f_c) \leq A(f)$ para toda $f \in E_c$. Ou seja, a área $A(f_c)$ é mínima entre todas as áreas $A(f)$, $f \in E_c$.

Com efeito, seja $\mu_c = \inf\{A(f);\ f \in E_c\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in E_c$ tal que $\mu_c \leq A(f_n) < \mu_c + \frac{1}{n}$. Então $\lim_{n\to\infty} A(f_n) = \mu_c$.

O conjunto E_c é eqüicontínuo, uniformemente limitado e,

além disso, se uma seqüência de funções pertencentes a E_c converge em cada ponto de $[-1,1]$, o limite ainda pertence a E_c.

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, a seqüência (f_n) possui uma subseqüência (f_{n_i}), que converge uniformemente em $[-1,1]$ para uma função $f_c \in E_c$. Passando ao limite sob o sinal de integral, vemos que $A(f_c) = \lim\limits_{i\to\infty} A(f_{n_i}) = \mu_c$, logo $A(f_c)$ é o valor mínimo de $A(f)$ para $f \in E_c$.

Indicaremos abaixo o gráfico da função f_c em cada um dos casos $c > 1$, $c = 1$ e $0 < c < 1$.

Exercícios

1. Sejam $f_n(x) = x^{2n}$, $g_n(x) = x^{2n+1}$ e $h_n(x) = (1-x^2)^n$. Determine os limites destas seqüências de funções no intervalo $[-1,1]$. Examine a uniformidade da convergência e trace, em cada caso, os gráficos das três primeiras funções da seqüência e da função limite.

2. Prove que $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge simplesmente, porém não uniformemente, em $[0,1]$, para a função identicamente nula.

3. Seja $\lim a_n = a$, com $a_n \neq a$ para todo n. Prove que a seqüência de funções $f_n(x) = a_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$ converge simplesmente para $f(x) = a\left(x + \frac{1}{x}\right)$ em $\mathbb{R} - \{0\}$. A convergência é uniforme num conjunto $X \subset \mathbb{R} - \{0\}$ se, e somente se, X é limitado e $0 \notin X'$.

4. Se $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b, \ldots, \lim j_n = j$, $\lim l_n = l$ então a seqüência de polinômios $p_n(x) = a_n + b_n x + \cdots + j_n x^9 + l_n x^{10}$ converge para o polinômio $p(x) = a + bx + \cdots + jx^9 + lx^{10}$, uniformemente em cada intervalo compacto $[a,b]$. (Para afirmações mais completas, veja *Elementos de Topologia Geral*, do autor, p. 211.)

5. As seguintes afirmações a respeito de uma seqüência de funções $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes:

   (a) a seqüência converge uniformemente em toda parte limitada de $\mathbb{R}$;

   (b) idem em toda parte compacta;

   (c) idem em todo intervalo compacto.

6. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ simplesmente em X, então $f_n + g_n \to f + g$ e $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ simplesmente em X. Além disso, $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ simplesmente em X, desde que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

7. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente em X, então $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em X. Se existir $c > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ e $|g_n(x)| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$ então $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em X. Também $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformemente

em X desde que exista $a > 0$ tal que $|f_n(x)| \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Dê exemplos mostrando que as duas últimas conclusões seriam falsas sem as hipóteses adicionais.

8. Seja $\lim f_n = f$ uniformemente em X. Se $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in X$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < f_n(x) < b + \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$. Conclua que, no Exercício 7, as hipóteses sobre g_n e f_n podem ser substituídas por hipóteses sobre g e f respectivamente.

9. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ limitada, seja $||f|| = \sup\{|f(x)|;\ x \in X\}$. O número $||f||$ chama-se a *norma* da função f. Prove as seguintes relações:

   (1) $||f|| \leq 0$; $||f|| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in X$;

   (2) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$;

   (3) $||c \cdot f|| = |c| \cdot ||f||$ se $c \in \mathbb{R}$;

   (4) $|\,||f|| - ||g||\,| \leq ||f - g||$;

   (5) $||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.

10. Prove que $f_n \to f$ uniformemente em X se, e somente se, $f_n - f$ é limitada para todo n suficientemente grande e $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$.

11. Seja $\lim f_n = f$ uniformemente em X. Então f é limitada se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow f_n$ limitada. No caso afirmativo, tem-se $\lim ||f_n|| = ||f||$.

12. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função que é contínua em todos os pontos do intervalo I, salvo um único ponto c. Obtenha uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\lim f_n = f$ simplesmente. Generalize para uma função f com um número finito de descontinuidades $c_1, \ldots, c_n$.

13. Mostre que não existe uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, convergindo simplesmente para a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ para x racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional.

14. Dada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ se, e somente se, a seqüência de funções $f_n(x) = f(x+n)$ converge uniformemente em $[0, +\infty)$ para a função constante a.

15. Se cada função $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em X e $f_n \to f$ uniformemente em X então f é uniformemente contínua em X.

16. Nenhuma seqüência de polinômios pode convergir uniformemente para a função $\frac{1}{x}$ ou para função $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no intervalo aberto $(0,1)$.

17. Dada uma seqüência simplesmente convergente de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, seja $\mathcal{U}$ o conjunto das partes $U \subset X$ tais que $f_n \to f$ uniformemente em U. Prove:

    (a) $\mathcal{U} \neq \emptyset$;

    (b) Se $U \in \mathcal{U}$ e $V \subset U$ então $V \in \mathcal{U}$;

    (c) Se $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$, então $U_1 \cup \cdots \cup U_k \in \mathcal{U}$.

18. Enuncie uma afirmação equivalente a: "a seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ não converge uniformemente para a função $f\colon X \to \mathbb{R}$", sem usar a palavra "não".

19. Exiba uma seqüência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que convirja uniformemente em $(0,1)$ mas não em $[0,1]$.

20. Se $f_n \to f$ uniformemente em X, com $f_n(X) \subset Y$ para todo n e $f(X) \subset Y$ então $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformemente em X desde que $g\colon Y \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua. Enuncie e prove um resultado análogo para $g_n \circ f \to g \circ f$. Foi preciso supor algo sobre f?

21. Se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em X, $g_n \longrightarrow g$ uniformemente em Y, $f(X) \subset Y$, $f_n(X) \subset Y$ para todo n e g é uniformemente contínua em Y, então $g_n \circ g_n \longrightarrow g \circ f$ uniformemente em X.

22. Uma seqüência monótona de funções é uniformemente convergente desde que possua uma subseqüência com esta propriedade.

23. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_n \longrightarrow a$, onde $a \in X$ e cada $x_n \in X$, então $\lim f_n(x_n) = f(a)$.

24. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $x_n \in X$, $\lim x_n = a \in X$ implica $\lim f_n(x_n) = f(a)$ então $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em cada parte compacta de X.

25. Se uma seqüência de funções monótonas converge simplesmente para uma função contínua num intervalo I, então a convergência é uniforme em cada parte compacta de I.

26. Se a série Σf_n converge uniformemente em X então $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente no mesmo conjunto.

27. Suponha que a seqüência de funções $f_n \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, todas definidas no mesmo intervalo I, é tal que, para cada $x \in I$, apenas um número finito de valores $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, é diferente de zero. Prove que Σf_n é absolutamente convergente em I. Dê um exemplo em que cada f_n seja contínua mas Σf_n não convirja uniformemente.

28. Se $\Sigma|g_n|$ converge uniformemente em X e existe $k > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, então $\Sigma f_n g_n$ converge absoluta e uniformemente em X.

29. São dadas as seqüências de funções $f_n, g_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades: existe uma constante $k > 0$ tal

que as reduzidas $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ satisfazem $|s_n(x)| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Além disso, as funções g_n decrescem uniformemente para zero, isto é, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$ e $\lim g_n = 0$ uniformemente em X. Nestas condições, prove que a série $\Sigma f_n \cdot g_n$ é uniformemente convergente em X. [*Sugestão*: use o método de demonstração do Teorema 21, Capítulo IV, e o exercício anterior.]

30. Para todo $\varepsilon > 0$, as séries $\Sigma \frac{\text{sen}(nx)}{n}$ e $\Sigma \frac{\cos(nx)}{n}$ convergem uniformemente no intervalo $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

31. Se a "série de Fourier" $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \,\text{sen}\, nx)$ converge uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$, prove que valem as relações de Euler:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \text{sen}\, mx\, dx, \quad m \geq 1.$$

32. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^{n+1} - x^n$. Prove que $\lim_{x \to 1} f_n(x) = 0$ uniformemente em relação a n.

33. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$. Determine $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$ e $f'(\pi)$.

34. Dê exemplo de uma seqüência de funções deriváveis $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que (f_n') seja uniformemente convergente, mas (f_n) não convirja num único ponto de $[a, b]$.

35. Se existe $\lim_n f_n(c) = L$ e (f_n') converge uniformemente para zero em I, então $f_n \to L$, uniformemente em cada compacto $K \subset I$. Aplique este fato a $f_n(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$.

36. A seqüência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, converge simplesmente para zero. Tem-se $\lim\limits_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. Existe $\lim\limits_n f_n'(x) = g(x)$ para todo $x \in [0,1]$ mas g não é derivada de função alguma em $[0,1]$. Note que a seqüência (f_n) cumpre $\lim(f_n') = (\lim f_n)'$ em $[0,1)$, embora a convergência não seja uniforme aí.

37. Dada uma série de potências $\Sigma a_n x^n$, sejam $c > 0$ e $M > 0$ tais que $|a_n c^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $(-c, c)$ está contido no intervalo de convergência da série considerada.

38. Se uma série de potências converge em todos os pontos de um intervalo compacto, a convergência é uniforme nesse intervalo (mesmo que ele não esteja contido no intervalo de convergência).

39. Prove que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ não converge uniformemente em toda a reta.

40. Mostre que as séries de potências $(1 - x) \cdot \Sigma(-1)^n x^{2n}$ e $(1 + x^2) \cdot \Sigma x^n$ têm ambas raio de convergência 1.

41. Seja $(-r, r)$ o intervalo de convergência da série $\Sigma a_n x^n$. Pondo $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ prove que, para todo $x \in (-1,1) \cap (-r, r)$, vale $\Sigma a_n x^n = (1 - x) \cdot \Sigma s_n x^n$.

42. Suponha que $a_n \geq 0$ para todo n, que $f(x) = \Sigma a_n x^n$ no intervalo $(-r, r)$ e que $\lim\limits_{x \to r^-} f(x) = L$. Prove que $\Sigma a_n r^n = L$.

43. Sejam $\sum\limits_{i \geq 1} a_i x^i$ e $\sum\limits_{j \geq 0} b_j x^j$ séries de potências com raios de convergência $r > 0$ e $s > 0$ respectivamente. Prove que existe uma série de potências $\sum\limits_{n \geq 0} c_n x^n$, com raio de convergência $t > 0$ tal que, para todo $x \in (-t, t)$, vale

$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{j\geq 0} b_j(\sum_{i\geq 1} a_i x^i)^j$. Conclua que a composta de duas funções analíticas é analítica.

44. A seqüência de funções $f_n(x) = nx^2$ possui derivadas limitadas no ponto 0 mas não é eqüicontínua neste ponto.

45. Um conjunto de polinômios de grau $\leq k$, uniformemente limitado num intervalo compacto, é eqüicontínuo nesse intervalo.

46. Diz-se que uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ converge *fracamente* para uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ quando $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para cada ponto $x \in X$ no qual f é contínua. Seja $D \subset \mathbb{R}$ denso. Prove que se uma seqüência de funções monótonas $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge simplesmente em D para uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então (f_n) converge fracamente para f em $\mathbb{R}$.

47. Seja $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Obtenha uma seqüência de funções contínuas crescentes $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge para f em $\mathbb{R} - \{0\}$, mas $(f_n(0))$ não converge.

48. Uma seqüência simplesmente limitada de funções monótonas $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui uma subseqüência que converge fracamente para uma função monótona $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a qual podemos tomar contínua à direita. [*Sugestão*: use Cantor-Tychonov e o Exercício 46.]

49. Seja (f_n) uma seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada num compacto $X \subset \mathbb{R}$. Se toda subseqüência uniformemente convergente em X tem o mesmo limite $f \colon X \to \mathbb{R}$, então $f_n \to f$ uniformemente em X.

50. Dê exemplo de uma seqüência eqüicontínua de funções $f_n \colon (0,1) \to (0,1)$ que não possua subseqüência uniformemente convergente em $(0,1)$.

51. Dada uma seqüência de funções duas vezes deriváveis $f_n\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, suponha que $f_n \longrightarrow f$ simplesmente em I, que $(f_n'(a))$ é limitada para um certo $a \in I$ e que (f_n'') é uniformemente limitada em I. Prove que $F \in C^1$.

52. Dada uma seqüência de funções $k+1$ vezes deriváveis $f_n\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, suponha que existam $a_0, \ldots, a_k \in I$ e $c > 0$, tais que $|f_n(a_0)| \leq c$, $|f_n'(a_1)| \leq c, \ldots, |f_n^{(k)}(a_k)| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que a seqüência $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada em I. Prove que existe uma subseqüência (f_{n_i}) que converge, juntamente com suas k primeiras derivadas, uniformemente em cada parte compacta de I.

53. Demonstre o Corolário do Teorema 22 para intervalos arbitrários (abertos ou não) $I \subset \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA

1. BARTLE, R. G. – *The Elements of Real Analysis*. New York, J. Wiley, 1964

2. BOAS, R. P. – *A Primer of Real Functions*. The Mathematical Association of America, 1960

3. BURRILL, C. W. e KNUDSEN, J. R. – *Real Variables*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969

4. CANTOR, G. – *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York, Dover, 1915

5. COHEN, L. W. e EHRLICH, G. – *The Structure of the Real Number System*. New York, Van Nostrand, 1963

6. DEDEKIND, R. – *Essays on the Theory of Numbers*. La Salle, I11., The Open Court Publ. Co., 1948

7. FIGUEIREDO, D. G. – *Análise I*. Rio de Janeiro, L.T.C., 1974

8. GLEASON, A. M. – *Fundamentals of Abstract Analysis*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966

9. GOFFMAN, C. – *Introduction to Real Analysis*. New York, Harper & Row, 1966

10. GRAVES, L. M. – *The Theory of Functions of Real Variables*. New York, McGraw-Hill, 1946

11. HALMOS , P. R. – *Naive Set Theory*. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1960

12. HARDY, G. H. – *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 1952

13. LANDAU, E. – *Foundations of Analysis*. New York, Chelsea, 1951

14. LANG, S. – *Analysis, I*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968

15. LIMA, E. L. – *Elementos de Topologia Geral.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970

16. LIMA, E. L. – *Logaritmos.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1973

17. MONTEIRO, L. H. Jacy – *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969

18. PHILLIPS, E. G. – *A Course of Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1956

19. PÓLYA, G. e SZEGÖ, G. – *Problems and Theorems in Analysis.* Berlim, Springer-Verlag, 1972

20. RUDIN, W. – *Princípios de Análise Matemática.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971

21. SPIVAK, M. – *Calculus.* New York, W. A. Benjamin, 1967

22. TARSKI, A. – *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* New York, Oxford Univ. Press, 1946

ÍNDICE ALFABÉTICO